

29 set 2022

Ric Stud merc ore 16

Norme p in $\mathbb{R}^n$ $1 \leq p \leq \infty$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Oss₁: $x \in \mathbb{R}^n$ fisso $p \mapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente
(in particolare $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_\infty$)

Per dimostrarlo mostro che

se $\|x\|_p = 1$ & $p' > p$ allora $\|x\|_{p'} \leq 1$

$$\|x\|_{p'} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} \right)^{1/p'} = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{p'/p} \right)^{1/p'} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p'}$$

$$\|x\|_p \leq 1 \Rightarrow \sum |x_i|^p \leq 1$$

$$p'/p > 1$$

$$\leq 1$$

Quando è un <

Prop: $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

Dim: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x\|_\infty^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \operatorname{sgn} x_i = x \cdot \xi$$

$$\xi_i = \operatorname{sgn}(x_i)$$

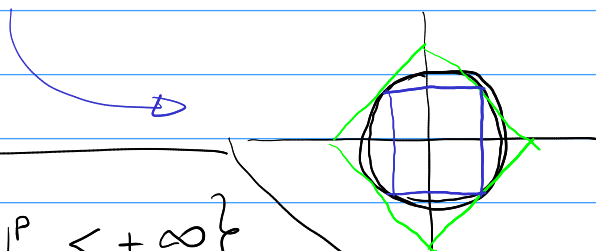
$$x \cdot \xi \leq \|x\|_2 \cdot \|\xi\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

↑ CAUCHY-SCHWARTZ

$$B_p(x_0, r) \doteq \{x : \|x - x_0\|_p < r\}$$

$$B_1(x_0, r) \subset B_p(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$$

$$B_\infty(x_0, \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B_2(x_0, r) \subset B_1(x_0, \sqrt{n}r)$$



$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_i)_{i=1}^{\infty} : \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}$$

$$\|x\|_p \doteq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ è sp. NORMATO
è BANACH

Oss: Cambiando p cambia anche lo spazio

es: $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \quad x_i = \frac{1}{i} \quad x \in \ell^p(\mathbb{N}) \Leftrightarrow p > 1$

Es: dati $p < p'$ trovare un elemento che sta in $\ell^{p'}$ ma non in ℓ^p .

$\|\cdot\|_p$ è una norma. Verifico solo la disug. triangolare

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

considero $\pi_n: \ell^p(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$
 $(x_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$

$$\|\pi_n(x+y)\|_p \leq \|\pi_n x\|_p + \|\pi_n y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

passando al
sup su n

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$$

$$(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ succen. in } \ell^p$$

Se $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy allora converge per $\|\cdot\|_p$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N \quad \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p < \varepsilon$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p}$$

$\Rightarrow$ per ogni componente j $(x_j^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy

$$x_j^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

da verificare!

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

passando al limite
 $m \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

passando
al sup su k

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Oss: $p \mapsto \|x\|_p$ è deb. decrescente

$$x \in \ell^p(\mathbb{N}) \Rightarrow x \in \ell^{p'}(\mathbb{N}) \quad \forall p' \geq p$$

$$\ell^p(\mathbb{N}) \hookrightarrow \ell^{p'}(\mathbb{N}) \text{ è continua}$$

$\|\cdot\|_p \quad \quad \quad \|\cdot\|_{p'}$

Mostrare che $l^1(\mathbb{N})$ è denso in ogni $l^p(\mathbb{N})$ con $1 \leq p$

$l^1(\mathbb{N})$ non è denso in $l^\infty(\mathbb{N})$

chi è la chiusura di $l^1(\mathbb{N})$ in $l^\infty(\mathbb{N})$?

(X, d)

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$

f è L -lip. $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$|f(x) - f(y)| \leq L d(x, y) \quad (*)$$

$\forall x, y \in X$

Oss₁: f è L -Lip $\iff$

$$f(x) \leq f(y) + L d(x, y) \quad **$$

$\forall x, y \in X$

$(\implies)$ è ovvia

$(\impliedby)$ se $(**)$ vale $\forall x, y$ allora $f(y) \leq f(x) + L d(y, x) \quad (**)$

$$f(x) - f(y) \leq L d(x, y) \quad \text{per } (**)$$

$$f(y) - f(x) \leq L d(x, y) \quad \text{per } (**)$$

$\} \implies (*)$

Lemma: $f_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$

$\alpha \in \mathcal{A}$

f_α L -lip

$\forall \alpha \in \mathcal{A}$

(con la stessa L !)

definisco $f(x) := \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x)$

se $\exists x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) > -\infty$

allora $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è L -Lipschitz.

$$(-\infty <) \quad f(x_0) \leq f_\alpha(x_0) \leq f_\alpha(y) + L d(x_0, y)$$

$$f(x_0) - L d(x_0, y) \leq f_\alpha(y) \quad \left(\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \right) \quad f(x_0) - L d(x_0, y) \leq f(y)$$

f assume solo valori finiti.

$$\boxed{f(x) \leq f_\alpha(x) \leq f_\alpha(y) + L d(x, y)}$$

$\forall \alpha$
 $\forall x, y$

passando all'inf su α

$$f(x) \leq f(y) + L d(x, y)$$

$\forall x, y \in \bar{X}$

$\Rightarrow f \in L\text{-Lip}$

$(\bar{X}, d)$ sp. metrico $A \subseteq \bar{X}$

$A \neq \emptyset$

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

$$\boxed{x \mapsto d(x, A) \text{ è } 1\text{-Lip}}$$

Dim: $f_a(x) = d(x, a)$ $f(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} f_a(x)$

$$f_a(x) \geq 0$$

$\forall a \in A$ $f_a \in 1\text{-Lip}$ infatti

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \leadsto$$

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \longrightarrow$$

$$d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$$

$$d(y, a) - d(x, a) \leq d(x, y)$$

$\Downarrow$

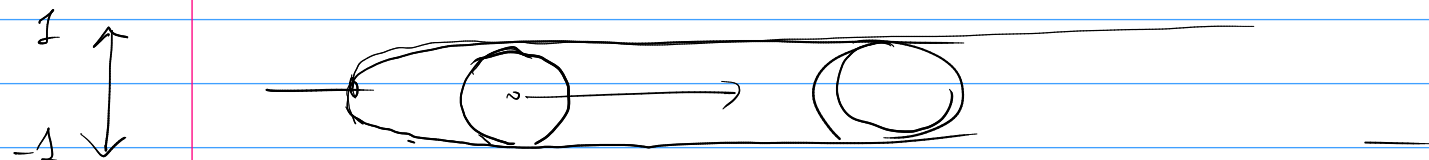
$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$$

LEMMA $\Rightarrow f \in 1\text{-Lip}$

Oss: $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$ ~~chiusura di~~
 A

Esercizio: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto $\vee$ e limitato mostrare che
 Ω contiene una palla di raggio massimo (euclideo)

Oss: La limitatezza è necessaria



$$\varphi(x) := d(x, \Omega^c) \quad \varphi(x) > 0 \iff x \in \Omega$$

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{considero } r_0 \doteq \max_{x \in \bar{\Omega}} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

$\bar{\Omega}$ è chiuso, limitato $\subseteq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow \bar{\Omega}$ compatto
 φ è continua

1 $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

2 $\forall r > r_0 \quad \forall y_0 \quad B_r(y_0) \cap \Omega^c \neq \emptyset$

3 $x \in \Omega^c \Rightarrow d(x_0, x) \geq d(x_0, \Omega^c) = r_0$

$d(x_0, x) < r_0 \Rightarrow x \notin \Omega^c$ cioè $x \in \Omega$

ovvero $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$

4 se $B_r(y_0) \subset \Omega$ con $r > r_0 \Rightarrow d(y_0, \Omega^c) \geq r > r_0$
 assurdo

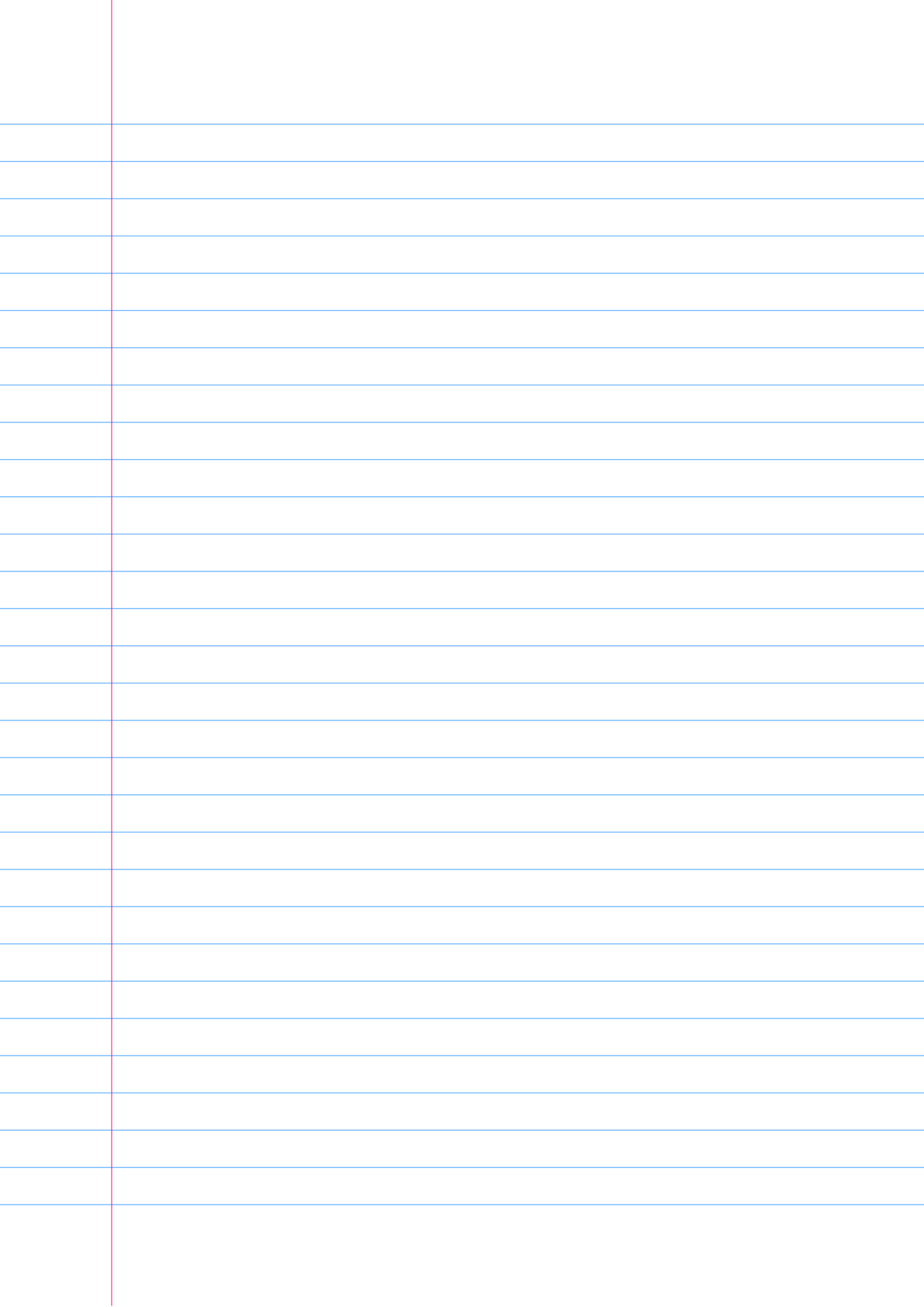
Distanza di Hausdorff

$$\mathcal{F}(X) = \left\{ A \subset X : \begin{array}{l} A \text{ chiuso,} \\ A \text{ limitato} \end{array} A \neq \emptyset \right\}$$

$$\mathcal{D}(A, B) \doteq \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

- $(\mathcal{F}(X), \mathcal{D})$ è uno sp. metrico
- Se (X, d) è completo allora $(\mathcal{F}, \mathcal{D})$ è completo





5 ott 2022

DISTANZA DI HAUSDORFF

(X, d) sp metrico $A, B \subset X$ ^{non vuoti}
limitati

$$\partial(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A) \right\}$$

$$\partial(A, B) = \partial(A, \bar{B}) = \partial(\bar{A}, B) = \partial(\bar{A}, \bar{B})$$

$$\mathcal{H}(X) \doteq \left\{ A \subseteq X : \begin{array}{l} A \text{ chiuso, limitato} \\ A \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

Prop: $(\mathcal{H}(X), \partial)$ è uno sp metrico

Dim: (i) $\partial \geq 0$ $\forall A, B \in \mathcal{H}(X)$
 $\partial(A, B) = 0 \iff A = B$

⊆ ovvia

$$\partial(A, B) = 0 \Rightarrow \boxed{\sup_{x \in A} d(x, B) = 0} \ \& \ \boxed{\sup_{x \in B} d(x, A) = 0}$$

$$x \in A \Rightarrow d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in \bar{B} = B \Rightarrow A \subseteq B$$

$$\text{da } \boxed{} \Rightarrow B \subseteq A \Rightarrow B = A$$

$$(ii) \partial(A, B) = \partial(B, A) \quad \text{ovvia}$$

$$(iii) \quad \partial(A, C) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\begin{cases} \sup_{x \in A} d(x, C) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon & \textcircled{I} \\ \sup_{x \in C} d(x, A) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon \end{cases} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\varepsilon > 0$ fissato

$$x \in A \quad \exists b \in B : d(x, b) < d(x, B) + \varepsilon/2 \leq \partial(A, B) + \varepsilon/2$$

$$\exists c \in C : d(b, c) \leq \partial(B, C) + \varepsilon/2$$

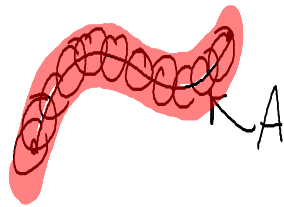
$$d(x, C) \leq d(x, c) \leq d(x, b) + d(b, c) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon \quad \forall x \in A$$

$$\sup_{x \in A} d(x, C) \leq \partial(A, B) + \partial(B, C) + \varepsilon \quad \textcircled{I} \text{ è dim}$$

La disug. $\textcircled{II}$ si dimostra nella stessa maniera
 $A \leftrightarrow C$

Def: $A \subset X$

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A) \doteq \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)$$



(i) $N_\varepsilon(A)$ è aperto

(ii) $N_\varepsilon(A \cup B) = N_\varepsilon(A) \cup N_\varepsilon(B)$

(iii) $\overline{N_\varepsilon(A)} \subset \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\} \leftarrow \triangle \neq$

(iii) $N_{\varepsilon_1}(N_{\varepsilon_2}(A)) \subset N_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(A)$

$A, B \in \mathcal{F}(X)$ — ○ —

Prop: $\mathcal{D}(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B) \ \& \ B \subset N_\varepsilon(A)\}$

Dim $\max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\right\} = \max\left\{\inf_{\varepsilon > 0} \{A \subset N_\varepsilon(B)\}, \inf_{\varepsilon > 0} \{B \subset N_\varepsilon(A)\}\right\}$

La dim della prop è conseguenza del lemma

Lemma: $\sup_{x \in A} d(x, B) = \inf_{\varepsilon > 0} \{A \subset N_\varepsilon(B)\}$

$\parallel$ $\parallel$
 d_0 ε_0

Dim $[d_0 \geq \varepsilon_0] \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad d_0 \geq \varepsilon$

$\varepsilon < \varepsilon_0 \quad A \not\subset N_\varepsilon(B) \Rightarrow \exists a \in A : \varepsilon \leq d(a, B) \leq d_0$

$[d_0 \leq \varepsilon_0] \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0 \quad d_0 \leq \varepsilon$

$\varepsilon > \varepsilon_0 \quad A \subset N_\varepsilon(B) \Rightarrow \forall a \in A \quad d(a, B) < \varepsilon \Rightarrow d_0 \leq \varepsilon$

passando al
 $\sup_{a \in A}$

→ Ereditarietà per $\mathcal{D}$

TEOR: (X, d) sp. metrico

(a) Se (X, d) è completo $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \mathcal{D})$ è completo

(b) Se (X, d) è TOTALMENTE LIMITATO $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \mathcal{D})$ è TOT. LIM.

(c) Se (X, d) è COMPATTO $\Rightarrow (\mathcal{F}(X), \mathcal{D})$ è compatto

Def: X è tot. lim $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_m$ t.c. $X \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)}_{\varepsilon\text{-net}}$

COR: $0 < \mu < 1$; $X = \mathbb{R}^n$ con metr. euclid.

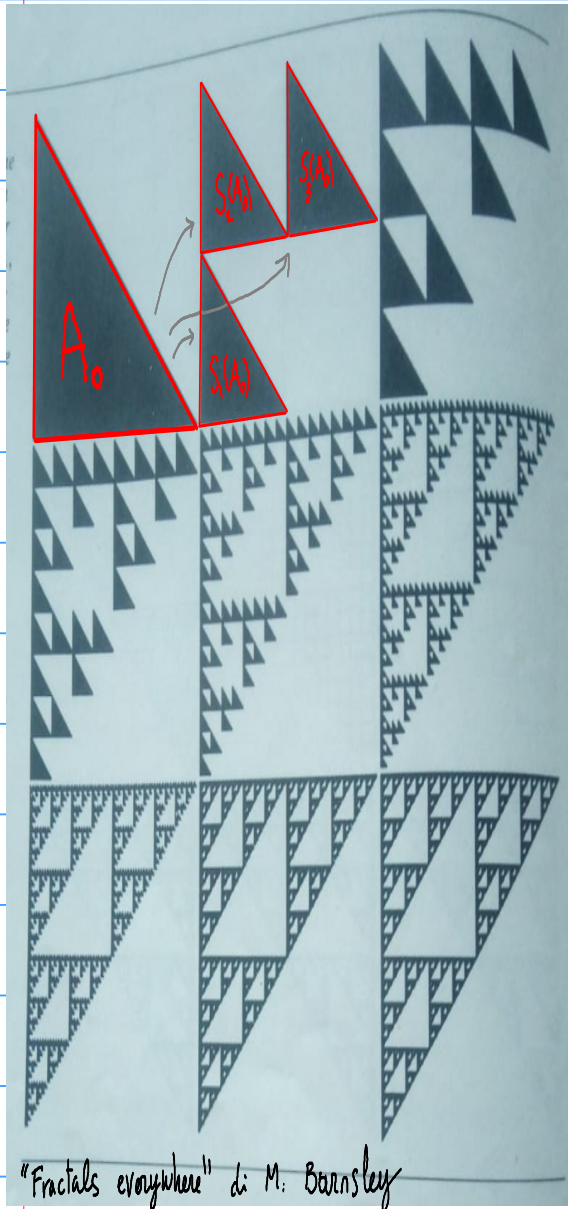
$$S_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad |S_\alpha(x) - S_\alpha(y)| \leq \mu |x - y| \quad 1 \leq \alpha \leq m$$

$$\Phi(A) = \bigcup_{\alpha=1}^m S_\alpha(A)$$

$$(i) \quad \Phi: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X) \quad \mathcal{D}(\Phi(A), \Phi(B)) \leq \mu \mathcal{D}(A, B)$$

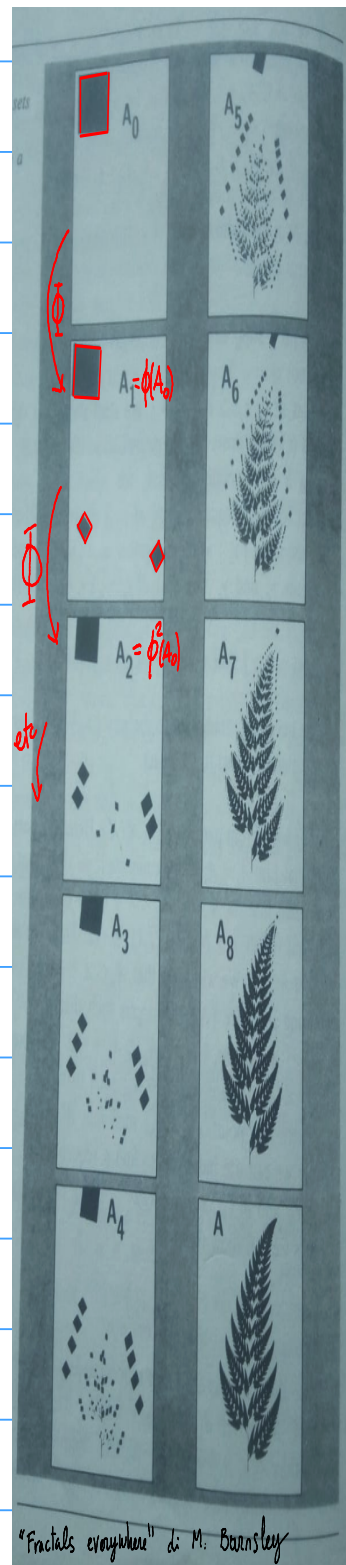
$$(ii) \quad \exists! A_\infty \in \mathcal{F} \quad \Phi(A_\infty) = A_\infty$$

$$(iii) \quad A_0 \in \mathcal{F} \quad \mathcal{D}(\Phi^n(A_0), A_\infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



Esempi dell'effetto delle prime iterazioni
della mappa Φ in un paio di casi.

L'insieme A_∞ dipende solo dal set di contrazioni
scelto, mentre risulta irrilevante il particolare insieme
 A_0 di partenza.



IFS

$$X = \mathbb{R} \quad S_1(x) = \frac{x}{3}$$

$$S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

X_∞ è l'insieme di Cantor

DIM [COR]

$$(i) \quad A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \begin{matrix} S_\alpha(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \\ \phi(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Sono} \\ \text{tutti} \\ \text{compatti} \end{matrix}$$

ϕ è contratt. $\delta > d(A, B) \Rightarrow \mu\delta > d(\phi(A), \phi(B))$

$$\phi(A) \subset N_{\mu\delta}(\phi(B)) \text{ \& } \phi(B) \subset N_{\mu\delta}(\phi(A))$$

$$\circledast \Rightarrow A \subset N_\delta(B) \Rightarrow S_\alpha(A) \subset N_{\mu\delta}(S_\alpha(B)) \Rightarrow$$

$$1 \leq \alpha \leq m$$

$$\phi(A) = \bigcup_{1 \leq \alpha \leq m} S_\alpha(A) \subseteq \bigcup_{1 \leq \alpha \leq m} N_{\mu\delta}(S_\alpha(B)) = N_{\mu\delta}\left(\bigcup_{\alpha} S_\alpha(B)\right) = N_{\mu\delta}(\phi(B))$$

I punti (ii) e (iii) del COROLLARIO

sono conseq del teor. delle CONTRAZIONI

LEMMA: (X, d) è sp. metrico $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy

(i) Se $\exists n_k \uparrow \infty$ t.c. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$
 $\exists \bar{x} \in X$

(ii) Se $\varepsilon_k \downarrow 0$ allora $\exists n_k \uparrow \infty$ t.c.

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$$

Dim (i) $\forall \varepsilon > 0 \exists N: d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > N$

$\varepsilon > 0$ fissato

$$\begin{aligned} & \text{Se } n \geq N \\ & \left\{ \begin{array}{l} \text{scelgo } n_k > n \geq N \\ m_k: d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon/2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_n, \bar{x}) & \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) \\ & < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: n > N \quad d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

(ii) $N_k := \min \{N: d(x_n, x_m) < \varepsilon_k \quad \forall n, m \geq N\}$

N_k def. crescente

$$n_k = N_k + k$$

$$n_{k+1} > n_k \geq N_k$$

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$$

DM TEOR (a) $\mathcal{F}(X, \partial)$ è completo ($\kappa(X, d)$ lo è)

A_n succ di Cauchy per ∂

SPG: $\partial(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$

$\hookrightarrow \text{se } k > n \quad \partial(A_n, A_k) < \sum_{j=n}^{k-1} 2^{-j} \leq 2^{-n+1}$

$A \doteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$



$A \neq \emptyset$?

$\partial(A_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \partial(A_n, A) < \varepsilon$

Se $N: 2^{-N+1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall n \geq N \quad \begin{cases} \sup_{x \in A_n} d(x, A) \leq 2^{-N+1} & (D1) \\ \sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1} & (D2) \end{cases}$

$(D1) \Rightarrow A_n \subset N_\varepsilon(A)$

$(D2) \Rightarrow A \subset N_\varepsilon(A_n)$

D1 $x \in A_n$ fissato $\exists \bar{x} \in A: d(x, \bar{x}) \leq 2^{-N+1} \leftarrow$

$(x_k)_{k=n}^\infty$ definita per induzione $x_n = x$

$\begin{cases} x_{k+1} \in A_{k+1} \\ d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k} \end{cases}$

$$x_k \in A_k \quad d(x_k, A_{k+1}) \leq d(A_k, A_{k+1}) < 2^{-k}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} \in A_{k+1} : d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-k}$$

È possibile costruire (x_k) ed è di Cauchy

$$x_k \rightarrow \bar{x} ; \text{ inoltre } \bar{x} \in A \quad (D1 \#)$$

$$(D2) \quad \sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq 2^{-N+1} \quad \leftarrow \text{da dimostrare}$$

$$\sup_{x \in A} d(x, A_n) \leq \sup_{x \in \bigcup_{k \geq m} A_k} d(x, A_n) \quad m > n$$

$$\leq \sup_{k \geq m} \sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq 2^{-m+1} \leq 2^{-N+1}$$

$$\sup_{x \in A_k} d(x, A_n) \leq d(A_k, A_n) \leq 2^{-m+1} \quad \forall k \geq m > N$$

TEOR: (X, d) metrico. Sono equivalenti le seg.

(a) X è compatto per successioni

(b) X è completo e TOTALMENTE LIMITATO

(c) Se $X \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ A_k aperti $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$
 $X \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_{\alpha_i}$

→ Ereditarietà per ∂

TEOR: (X, d) sp. metrico

✓ (a) Se (X, d) è completo $\Rightarrow (f(X), \partial)$ è completo

→ (b) Se (X, d) è TOTALE LIMITE $\Rightarrow (f(X), \partial)$ è TOT. LIM.

(c) Se (X, d) è COMPATTO $\Rightarrow (f(X), \partial)$ è compatto

Def: X è tot. lim $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\varepsilon\text{-net}} \text{ t.c. } X \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$

$$\mathcal{N}(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : B \subset N_\varepsilon(A) \text{ \& } A \subset N_\varepsilon(B) \}$$

$(a) + (b) \Rightarrow (c)$ (vedi dopo)

Dim(b): (X, d) TOT. LIM. $\Rightarrow f(X), \partial$ è tot lim

Def: X è tot. lim. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \varepsilon\text{-net}$ cioè

$$x_1, \dots, x_n \in X \text{ t.c. } X = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) = N_\varepsilon(\{x_1, \dots, x_n\})$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists F \subset X \quad \forall F \quad X \subset N_\varepsilon(F)$$

$\mathcal{P}(F)$ è una ε -rete per ∂

Dato $C \in \mathcal{F}(X)$ considero $F_c = F \cap N_\varepsilon(C)$

$$F_c \subset N_\varepsilon(C)$$

$$C \subset \bigcup_{\xi \in F} B_\varepsilon(\xi) \quad \xi \in F \cap F_c$$

$$C \subset N_\varepsilon(F_c) \quad \leftarrow \quad C \subset \bigcup_{\xi \in F_c} B_\varepsilon(\xi) = N_\varepsilon(F_c) \quad d(\xi, C) \geq \varepsilon \Rightarrow B_\varepsilon(\xi) \cap C = \emptyset$$

TEOREMA : Le seguenti cond sono equivalenti:

(a) (X, d) compatto per successioni

(b) (X, d) COMPLETO & TOT. LIMITATO

(c) $\left(\text{se } X \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, A_\alpha \text{ aperti} \right) \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ t.c. } X \subseteq \bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$

$\text{--- } \forall \varepsilon > 0 \exists C_i$

OSS/Esercizio: ① $X \text{ tot limitato} \Leftrightarrow X = \bigcup_{i=1}^m C_i \text{ diam}(C_i) < \varepsilon$

② $(X \text{ tot LIMITATO} \& Y \subseteq X) \Rightarrow Y \text{ tot. Lim.}$

$\text{diam } B_\varepsilon(\xi) \leq 2\varepsilon \quad \text{diam}(C) < \varepsilon \Rightarrow C \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\xi) \quad \forall \xi \in C$

Dim

(a) $\Rightarrow$ (b)

se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ succ di Cauchy in $X \xRightarrow{\text{COMPLET}} \exists n_k: \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \bar{x} \in X \xRightarrow{\text{CAUCHY}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

Per assurdo, suppongo X non tot. Lim. $\rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. non esiste una ε -rete

$x_0 \in X$ qualsiasi $x_1 \in X \setminus B_{\varepsilon_0}(x_0)$ $x_2 \in X \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_0) \cup B_{\varepsilon_0}(x_1))$
 $\nwarrow \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\{x_0, x_1\})$

dato $x_0, \dots, x_k$ scelgo $x_{k+1} \in X \setminus \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\{x_0, \dots, x_k\})$

$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0 \quad \forall m \neq n \Rightarrow x_n$ non ha succ convergenti

ASSURDO //

(b) $\Rightarrow$ (c) (X, d) completo tot. lim $\Rightarrow X$ è compatto per ricoprimenti

$$\varepsilon_k = 1/k$$

per assurdo $\exists (A_\alpha)_{\alpha \in Q}$ di aperti $\bigcup_{\alpha \in Q} A_\alpha \supset X$
 suppongo

ma X non ammette ricoprimenti finiti

$$X_0 = X = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_1} C$$

$\mathcal{F}_1$ famiglia finita di insiemi

$$\text{diam}(C) < \varepsilon_1 \quad \forall C \in \mathcal{F}_1$$

$$X_1 = \overline{C} \in \mathcal{F}_1$$

non ricopribile da finiti A_α

X_1 è TOT. LIM. ma non finit. ricopribile
 per induz.

X_{k-1} TOT. LIM. ma non finit. ricopribile

$$X_{k-1} = \bigcup_{C \in \mathcal{F}_k} C$$

$\mathcal{F}_k$ fam. finita di insiemi

$$\text{diam}(C) < \varepsilon_k \quad \forall C \in \mathcal{F}_k$$

$$X_k = \overline{C} \in \mathcal{F}_k$$

non finitamente ricopribile da A_α

$$X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots$$

X_k TOT. LIM.

non finit. ricoprib. con (A_α)

$$\xi_k \in X_k$$

$$\forall k \geq N \quad \xi_k \in X_N \quad \forall k \geq N$$

$$d(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}) \leq \text{diam}(X_N) = \varepsilon_N = \frac{1}{N}$$

$$\forall k_1, k_2 \geq N$$

$\Rightarrow (\xi_k)$ è di CAUCHY

$$\Rightarrow \xi_k \rightarrow \bar{\xi} \in \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k$$

$$\exists \bar{\alpha} \text{ t.c. } \bar{\xi} \in A_{\bar{\alpha}} \xrightarrow{\text{aperto}} \exists \delta > 0 \quad B_{\delta}(\bar{\xi}) \subset A_{\bar{\alpha}}$$

$$\text{se } N > \frac{1}{2\delta} \quad X_N \subset B_{\delta}(\bar{\xi}) \subset A_{\bar{\alpha}}$$

ASSURDO $\Rightarrow X_N$ è finitamente ricoprib.

$$(c) \Rightarrow (a) \quad X \text{ compatto per ricopr.} \Rightarrow X \text{ compatto per successioni}$$

Per assurdo: X non compatto per succ.
 $\exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ senza succ. conv.

$$y \in X \quad \exists A_y \text{ intorno di } y \text{ t.c. } \{k: x_k \in A_y\} < +\infty$$

$$X = \bigcup_{y \in X} A_y \quad \text{Provo un sottoricop. finito (val(c))}$$

$$y_1, \dots, y_m \text{ t.c. } X = \bigcup_{j=1}^m A_{y_j}$$

$$N = \{k: x_k \in X\} = \bigcup_{j=1}^m \{k: x_k \in A_{y_j}\}$$

ASSURDO!

$\nwarrow$ unione finita di insiemi finiti

~~✗~~

PROP: Se (X, d) è uno sp. metrico compatto

$\Rightarrow \exists D \subseteq X$ D numerabile e denso in X

Dim: (X, d) compatto $\Rightarrow$ tot. limitato.

$\varepsilon_n \doteq \frac{1}{n} \quad \forall n \exists F_n \subset X$ una ε_n -rete $\left\{ \begin{array}{l} F_n \neq \emptyset \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \supset X \end{array} \right.$

$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{è numerabile perché} \\ \text{unione numerabile di insiemi finiti} \\ \text{denso} \end{array} \right.$

(X, d) metrico

$\mathcal{F}(X) \rightarrow C(X)$

$\varphi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$

$A \mapsto \varphi_A(x) = d(x, A)$

$$\|\varphi_A - \varphi_B\| = \sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = d(A, B)$$

$$(\geq) \quad \sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| \geq \sup_{x \in A} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \sup_{x \in A} |d(x, B)|$$

analogamente $\sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| \geq \sup_{x \in B} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| = \sup_{x \in B} |d(x, A)|$

La disug. opposta per esercizio.

$$\left(\sup_{x \in X} |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)| \geq d(A, B) \right)$$

Es1 Se C chiuso non vuoto $\subseteq \mathbb{R}^n$

$p_0 \in \mathbb{R}^n$ allora $\exists \xi_0 \in C: d(p_0, C) = d(p_0, \xi_0)$

ESQ: X metrico compatto $f_n \in C(X, \mathbb{R})$

$\forall x \in X \quad (f_n(x))_n$ decrescente

$\inf_n f_n(x) = f(x) \in C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow$ la convergenza è uniforme

$$\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

TEOR di CONV di DINI

Q_1 : Per quali α f è estendibile per continuità in $(0,0)$?

Q_2 : " " " l'estensione di f è differenziabile

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^4 (x^3 y - x y^3)}{\lambda^{2\alpha} (x^2 + y^2)^\alpha} = \lambda^{4-2\alpha} f(x, y)$$

f è omogenea di grado $4-2\alpha$

f è continua su $\mathbb{R}^2(0,0)$

DEF: $f: \mathbb{R}_*^N \rightarrow \mathbb{R}$ è ps-omogenea di grado δ se

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda^\delta f(\vec{x}) \quad \forall \lambda > 0$$

pos

In generale una funzione omogenea di grado γ

su $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ è continua $\iff \gamma > 0$
(a meno che f non sia costante)

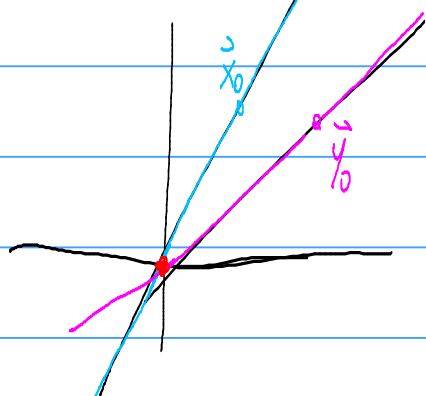
$\gamma < 0$

Dim: Se $\gamma < 0$ $\lim_{\vec{x} \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{x}_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^\gamma f(\vec{x}_0) = +\infty$
 $f(\vec{x}_0) \neq 0$

Se $\gamma = 0$ $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{x}) = f(\vec{x})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda \vec{y}) = f(\vec{y})$$



Se $\gamma > 0$ allora $\lim_{\vec{x} \rightarrow 0} |f(\vec{x})| = 0$

$$m = \max_{|\vec{x}|=1} |f(\vec{x})|$$

$$\text{Se } \vec{x} \neq 0 \quad |f(\vec{x})| = |\vec{x}|^\gamma \left| f\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) \right| \leq m |\vec{x}|^\gamma \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow 0} 0$$

Ritornando al problema iniziale, f è $(4-2\alpha)$ -omogenea
quindi è continua $\iff 4-2\alpha > 0 \quad \alpha < 2$

Per quali α f è differenziabile?

$$f \text{ differenziabile} \iff \boxed{4 - 2\alpha > 1}$$

sotto questa condizione

$$f(x, y) = o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow 0$$

13 ott 2022

$f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ γ -omogenea $\in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

- $\gamma < 1$ f non è differenziabile in 0
- $\gamma > 1$ f è diff. in 0
perché $f(x) = 0 + o(|x|)$

$$|f(x)| = |x|^\gamma \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq C |x|^\gamma = o(|x|) \text{ per } |x| \rightarrow 0$$

$\uparrow \sup_{|x|=1} |f(x)|$

E se $\gamma = 1$?

f è differenziabile $\Leftrightarrow f$ è lineare
e 1-omogenea

$$(\Rightarrow) \quad f(x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot x + R(x)$$

con $R(x) = o(|x|)$

$$f(x) = \frac{f(tx)}{t} = \frac{\nabla f(0) \cdot (tx)}{t} + \frac{R(tx)}{t|x|} \cdot |x| \quad \forall t$$

$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$

$$\Rightarrow f(x) = \nabla f(0) \cdot x$$

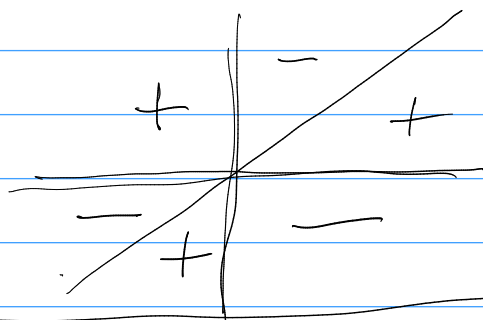
Es: $f(x, y) = \frac{x^2 y - x y^2}{x^2 + y^2} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

f è continua (anche in $(0,0)$) ma non differenziabile

f è 1-omogenea $\Rightarrow f$ è cont. su $\mathbb{R}^2$
continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$f(at, bt) = \frac{a^2 t^3 - b^2 t^3}{(a^2 + b^2) t^2} = t \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\text{sgn}(f) = \text{sgn}(x^2 y - xy^2) = \text{sgn}(xy(x-y))$$



TEOREMA DI EULERO

A CONO APERTO

$$A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\forall x \in A \Rightarrow \lambda x \in A \quad \forall \lambda > 0}$$

f differenziabile su A

A UORA

$$\boxed{f \text{ è } \alpha\text{-omogenea} \Leftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x) \quad \forall x \in A}$$

Dim: $x \in A$ fisso

$$F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}$$

f è α -omogenea
in dirizz. x

$$\Leftrightarrow F(t) \equiv f(x) \quad \forall t > 0$$

$$F'(t) = \frac{1}{t^{2\alpha}} [\nabla f(tx) \cdot x \cdot t^\alpha - f(tx) \alpha t^{\alpha-1}]$$

$$= \frac{1}{t^{\alpha+1}} [\nabla f(tx) \cdot x t - \alpha f(tx)]$$

$t=1$

Se $F' \equiv 0 \forall t \Rightarrow \nabla f(x) \cdot x - \alpha f(x) = 0$

$\uparrow (*)$

viceversa se vale $(*) \forall x$

$\Rightarrow$ sostituendo xt a x in $(*)$

otengo che $F'(t) \equiv 0$ da cui f è omogenea

FUNZIONI RADIALI

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è radiale se

$$f(x) = \varphi(r(x)) \quad \text{con } r(x) \doteq |x|$$

norma euclidea

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

(a) Se $\varphi \in C^1$ allora

$$\nabla f(x) = \varphi'(r(x)) \cdot \frac{x}{|x|}$$

(b) Se $\varphi \in C^2$ calcolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$

(b') " calcolare $\Delta f(x)$

$$\nabla r(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum x_i^2 \right)^{-1/2} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{|x|}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r(x)} \right) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x_i} r(x)}{r^2(x)} = - \frac{x_i / |x|}{|x|^2} = - \frac{x_i}{|x|^3}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r(x)} \right) = - \frac{x}{|x|^3}$$

(a) $\nabla f(x)$

$$\nabla (\varphi(r(x))) = \varphi'(r(x)) \frac{x}{|x|} = \varphi'(|x|) \frac{x}{|x|}$$

In particolare $\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(|x|)) = \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\varphi(|x|)) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right)$$

$$= \varphi''(|x|) \frac{x_j}{|x|} \frac{x_i}{|x|} + \varphi'(|x|) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{|x|} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i}{|x|} \right) = \delta_{ij} \cdot \frac{1}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\varphi(|x|)) = \varphi''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \left[\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right]$$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \varphi''(|x|) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} [n - 1]$$

Esercizio: Caratterizzare le funzioni radiali armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta f \equiv 0 \\ f = \varphi(|x|) \end{array} \right\} \iff \varphi''(t) + (n-1) \frac{\varphi'(t)}{t} = 0$$

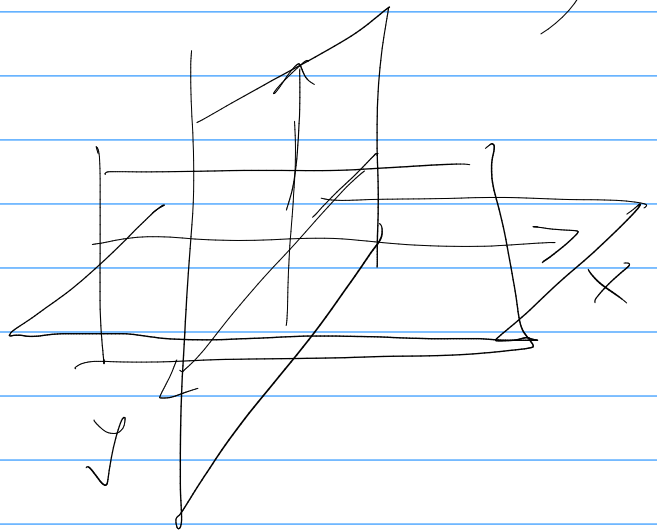
$$\boxed{u = \varphi'} \longrightarrow u'(t) + (n-1) \frac{u(t)}{t} = 0$$

Studio di funzione in $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$$

$$D(f) = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\})$$

f è infinitamente
derivabile
su $D(f)$



$$\{\nabla f(x) = 0\} = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2} + 3yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} + 3xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} + 3xy$$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3yz = \frac{1}{x^2} \\ 3xz = \frac{1}{y^2} \\ 3xy = \frac{1}{z^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x^2yz = 1 \\ 3xy^2z = 1 \\ 3xy z^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\frac{I}{II} \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y \quad \left. \begin{array}{l} \text{analog} \quad \frac{II}{III} \rightarrow y = z \end{array} \right\} x = y = z$$

se $P = (t, t, t)$ è staz. allora $3t^4 = 1$
 $P = t(1, 1, 1)$ $t = \pm \sqrt[4]{1/3}$

$$P = \pm \sqrt[4]{1/3} (1, 1, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + 3yz$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 3z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{2}{x^3}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 3z & 3y \\ 3z & \frac{2}{y^3} & 3x \\ 3y & 3x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

Valuto $H_f(P_+)$ = $\begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^3} & 3\mu & 3\mu \\ 3\mu & \frac{2}{\mu^3} & 3\mu \\ 3\mu & 3\mu & \frac{2}{\mu^3} \end{pmatrix}$

$$P_+ = \underbrace{\left(\sqrt[4]{1/3}\right)}_{\mu} (1, 1, 1)$$

$$\oplus \Delta_1 = 2/\mu^3$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{\mu^6} - 9\mu^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{4}{\mu^4} - 9\mu^4 \right)$$

$$\Delta_3 = \dots \leftarrow \text{calcolare il } \frac{9}{\mu^2} \text{ determinante}$$

$$\Delta_3 > 0 \text{ da verificare } \times \text{er.}$$

$$\Delta_1 > 0$$

$$\Delta_2 > 0$$

$$\Delta_3 > 0$$

$\Rightarrow$ Matrice $H_f(P_+)$ def. positiva

$\Rightarrow$ P è minimo locale.

Es: Verificare che P_+ è minimo
globale su $Q^+_{\frac{0}{0}} = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$
/

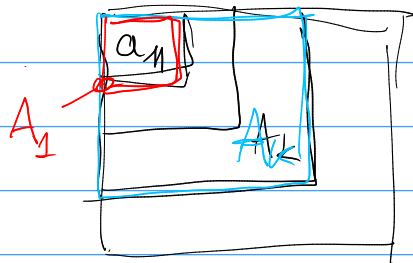
19 ott 2022

CRITERIO DEI MINORI DI NORD OVEST

A matrice simmetrica $n \times n$ NON degenera
voglio sapere qual è la segnatura di A

Se $a_{11} > 0$

$$\Delta_k = \det A_k$$



$$A = H_f(p)$$

$$\nabla f(p)$$

indice di neg. di A = numero di cambi di segno
nella sequenza $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$

Se $a_{11} < 0$

applico il criterio alla matrice $-A$

$$\text{ind di neg di } A = n - \text{ind neg}(-A)$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$$

ha 2 punti critici $P_{\pm} = \pm(\mu, \mu, \mu)$

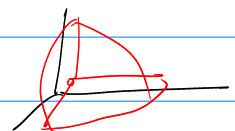
$$\mu = \sqrt[4]{1/3}$$

P_+ è un minimo locale
(perché $H_f(P_+)$ è def positiva)

P_+ è min globale su $Q = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$

$$Q_R = \left\{ x \geq \frac{1}{\sqrt[4]{R}}, y \geq \frac{1}{\sqrt[4]{R}}, z \geq \frac{1}{\sqrt[4]{R}}, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

Es se $R \gg 1$, e $x \in Q \setminus Q_R$
 $\Rightarrow f(x) > f(P_+)$



$$f(x) = \varphi(|x|)$$

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta f(x) = \varphi''(|x|) + \frac{(n-1)}{|x|} \varphi'(|x|)$$

$$\Delta f \equiv 0$$

$$\varphi''(t) + \frac{(n-1)}{t} \varphi'(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{(n-1)}{t}$$

$$\log|\varphi'| = -(n-1) \log t + k$$

$$\varphi'(t) = B t^{-(n-1)}$$

$$B \in \mathbb{R}$$

$$(n=1) \quad \varphi(t) = Bt + C$$

$$n=2 \quad \varphi(t) = B \log t + C$$

$$n \geq 3 \quad \varphi(t) = B' t^{-n+2} + C$$

$$(t > 0)$$

$$\log \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

V sp. vettoriale

$$\vec{x}, \vec{y} \in V \quad [\vec{x}, \vec{y}] = \{ t\vec{y} + (1-t)\vec{x} : 0 \leq t \leq 1 \}$$

Def: $C \subset V$ è convesso $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\forall x, y \in C, \quad [x, y] \subset C$$

oss: Intersezione di convessi è convessa

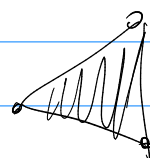
Prop: C convesso $\iff$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall x_1, \dots, x_m \in C \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \quad \text{t.c.} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$$

$P(m)$

comb. convessa
degli x_i



Dim: ($\Rightarrow$) suppongo di aver mostrato P_m

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i + \lambda_{m+1} x_{m+1}$$

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

$$\lambda_0 + \lambda_{m+1} = 1$$

$$1 = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda_0}$$

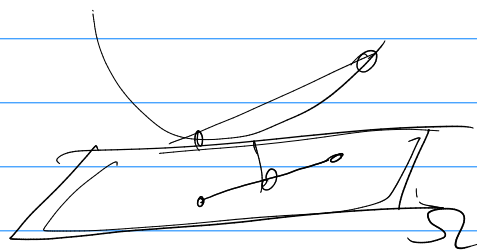
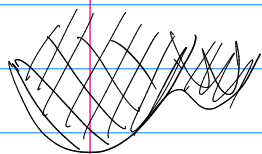
V sp vettoriale
 $\Omega \subset V$ Ω convesso

Def: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se

$$\forall x, y \in \Omega \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\text{Epi}(f) = \{ (x, a) \in \Omega \times \mathbb{R} : a \geq f(x) \}$$



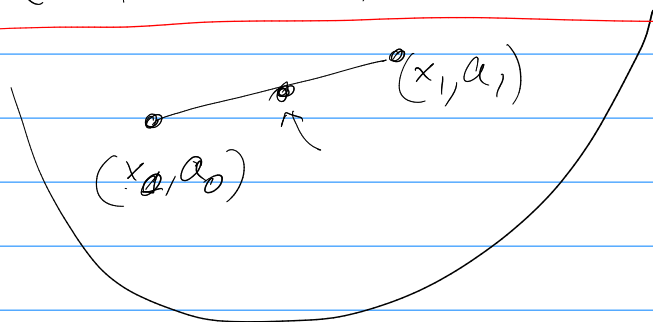
Prop: f convessa $\Leftrightarrow \text{epi}(f) \subseteq V \times \mathbb{R}$
 è convesso

Dim: $(\Rightarrow)$ $(x_0, a_0) \quad (x_1, a_1) \in \text{epi}(f)$

$$f(x_0) \leq a_0 \quad f(x_1) \leq a_1$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_0)$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda \cdot a_1 + (1-\lambda) \cdot a_0$$



$(\Leftarrow)$

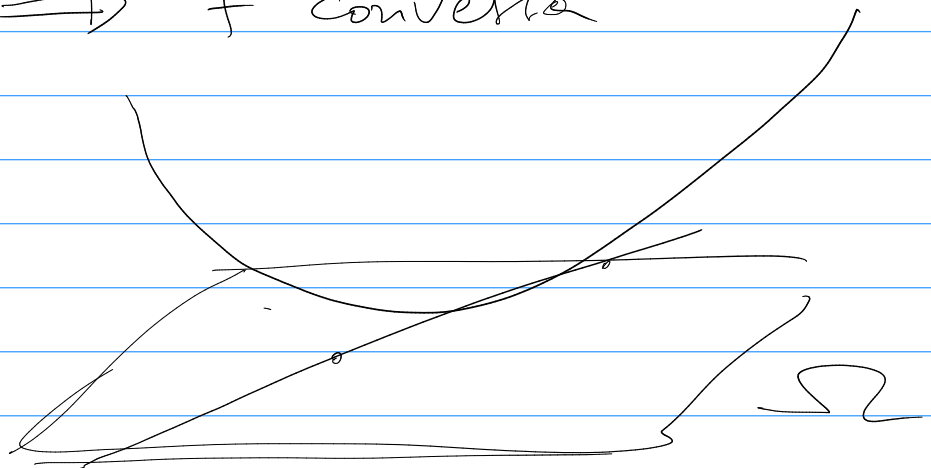
$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_0, \lambda a_1 + (1-\lambda)a_0) \in \text{epi}(f)$$

oss: La convessità è una proprietà "unidimensionale"

Se Ω conv. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$f|_r$ è convessa $\forall$ r retta in V

$\Rightarrow f$ convessa



Esercizio: Mostrare che $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

è convessa $\Leftrightarrow \forall x_1, \dots, x_m \in \Omega$
 $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0 \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso aperto

Prop: (a) Se $f \in C^1(\Omega)$ allora

f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x_1 \in \Omega \quad (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)) \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$

(b) se $f \in C^2(\Omega)$ allora

(b1) f convessa $\Leftrightarrow H_f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$
 $\uparrow$ semidef. pos

(b2) f convessa $\Leftrightarrow \forall x_0, x \in \Omega$
 $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

Dim(2)

$$x_0, x_1 \in \Omega$$

$$x_t \doteq t x_1 + (1-t) x_0 \quad t \in (0,1)$$

$$\varphi(t) = f(x_t)$$

f convessa $\Leftrightarrow \varphi$ convessa (qualunque siano x_0, x_1)

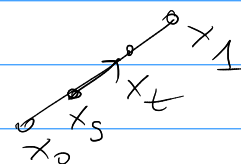
φ convessa $\Leftrightarrow \varphi'$ crescente (AN1)

$$\varphi'(t) = \nabla f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)$$

(a) f convessa $\Rightarrow \varphi$ convessa $\Rightarrow \varphi'$ ^{debt} crescente

$$\Rightarrow \varphi'(1) - \varphi'(0) \geq 0$$

$$[\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0)] \cdot (x_1 - x_0) \geq 0$$



(a) $t > s \quad (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s)) \cdot (x_t - x_s) \geq 0$

$$(\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s)) \cdot (x_1 - x_0) \stackrel{t>s}{\geq} 0$$

$$\varphi'(t) \geq \varphi'(s) \Rightarrow \varphi' \text{ cresc.}$$

$\Downarrow$
 φ convessa

(b) f conv $\Leftrightarrow \varphi$ conv $\forall x_1, x_2$

$$\varphi \text{ conv} \Leftrightarrow \varphi''(t) \geq 0 \quad \forall t$$

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_t) \cdot (x_1 - x_0)^{(i)} \quad \leftarrow \nabla f(x_t) \cdot (x_1 - x_0)$$

comp
i-esima

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_t) (x_1 - x_0)^{(i)} (x_1 - x_0)^{(j)}$$

$$= D^2 f(x_t) [x_1 - x_0]^2$$

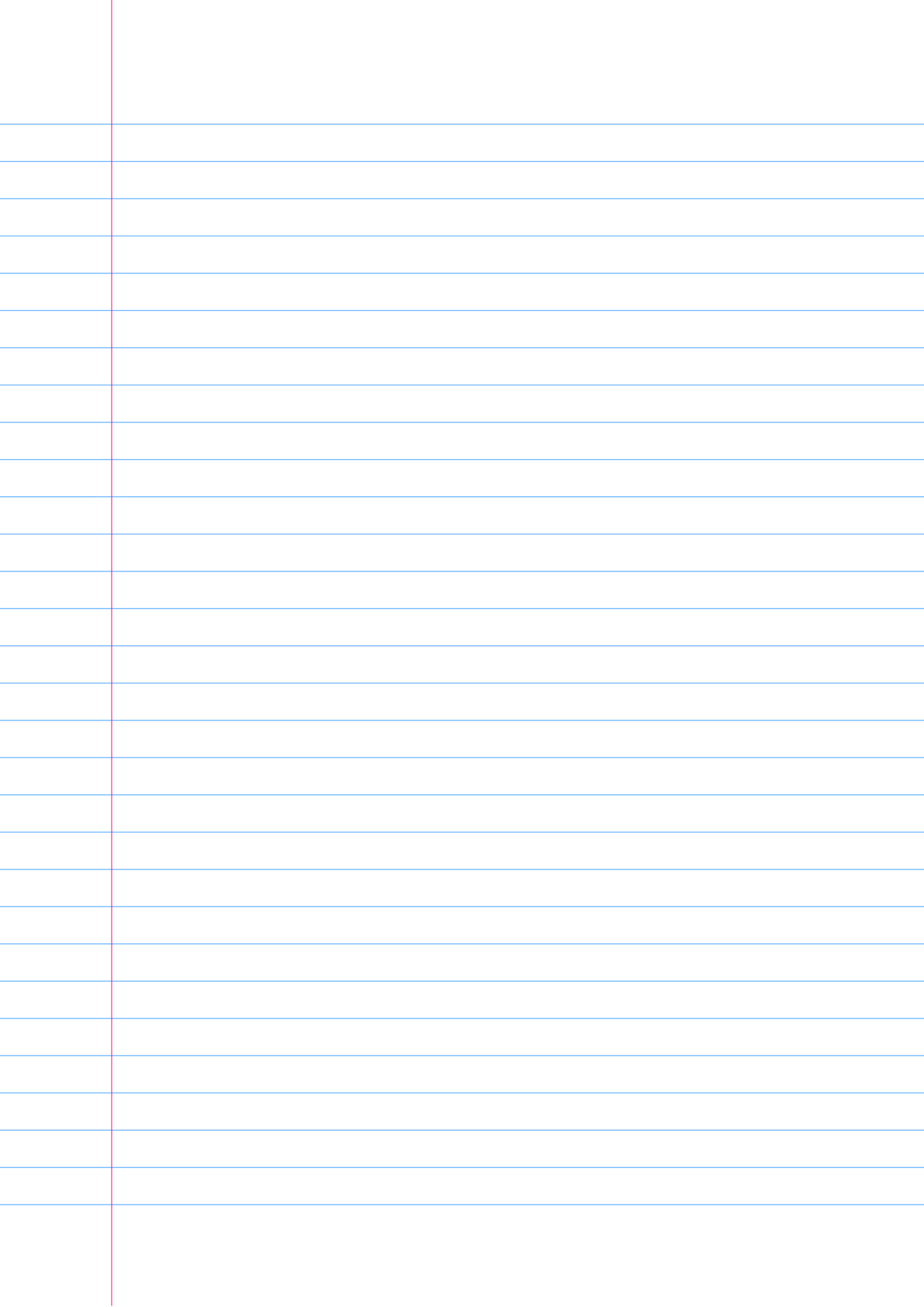
$$= (x_1 - x_0)^T H_f(x_t) (x_1 - x_0)$$

se f convessa $\Rightarrow \varphi''(t) \geq 0 \quad \forall x_1, x_0 \quad \forall t \Rightarrow H_f$

è semi definita positiva

Viceversa se H_f semidef pos $\Rightarrow \varphi'' \geq 0 \quad \forall x_0, x_1$
 $\Rightarrow f$ convessa

(b) Taylor con resto di Lagrange



20 ott 2022

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso
aperto

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in C^2(\Omega)$

(b2) f convessa $\iff \forall x_0, x \in \Omega$

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Dimo: $\overset{\text{Taylor con resto di Lagr.}}{[\Rightarrow]}$

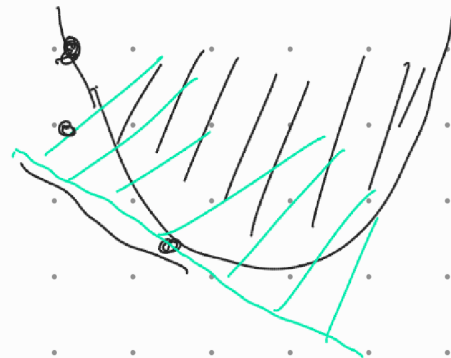
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \overbrace{D^2 f(\xi)}^{\text{semidef. pos}} [x - x_0]^2$$

$$\geq \underbrace{f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)}_{h_{x_0}(x)} \quad \xi \in [x_0, x] \subset \Omega$$

$$[\Leftarrow] \quad \{ (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : y \geq f(x) \} = \text{epi}(f)$$

$$\text{Epi}(f) = \bigcap_{x_0 \in \Omega} \text{Epi}(h_{x_0})$$

$\nwarrow$ convessi



TEO: Se V sp. vettoriale, $\Omega \subset V$ Ω convesso
aperto

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

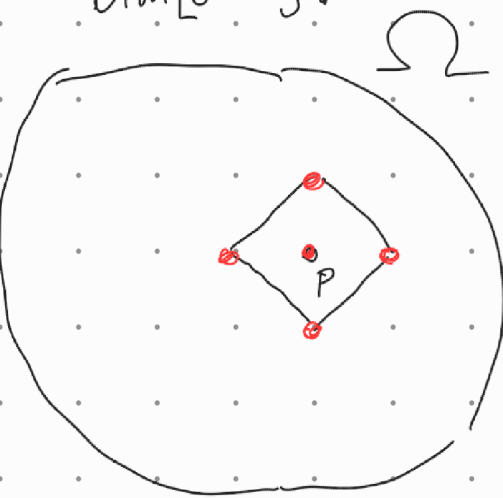
$\left. \begin{array}{l} \text{Convessa} \\ + \\ \text{localmente limitata} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ \u00e9 continua}$
(f \u00e9 loc. Lip)

OSS1: L'ipotesi di loc. limitata è necessaria

Es: trovare una funzione lineare (quindi convessa) che non sia continua.

OSS2: Se $V = \mathbb{R}^n$ allora l'ipotesi di loc. lim. NON serve (è automaticamente verificata)

Dim [OSS2]:



$$\forall p \in \Omega \quad \exists r > 0 : \quad \overline{B_r(p)} \subset \Omega$$

palla per 1-1.1

$$\forall x \in \overline{B_r(p)} \quad x \in \text{co} \left\{ p, p \pm \delta e_j \right\}_{1 \leq j \leq n}$$

inviluppo convesso

$e_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ (j-esima)

$$x = \sum_{\xi \in F} \lambda_{\xi} \cdot \xi$$

$$\sum_{\xi \in F} \lambda_{\xi} = 1$$

$$\lambda_{\xi} \geq 0$$

$$f(x) \leq \sum_{\xi \in F} \lambda_{\xi} f(\xi) \leq M$$

$$M = \max_{\xi \in F} \{ f(\xi) \}$$

Dim (TEO)

$$p \in \Omega$$

$$\text{SPG: } f(p) = 0 \quad ; \quad p = 0$$

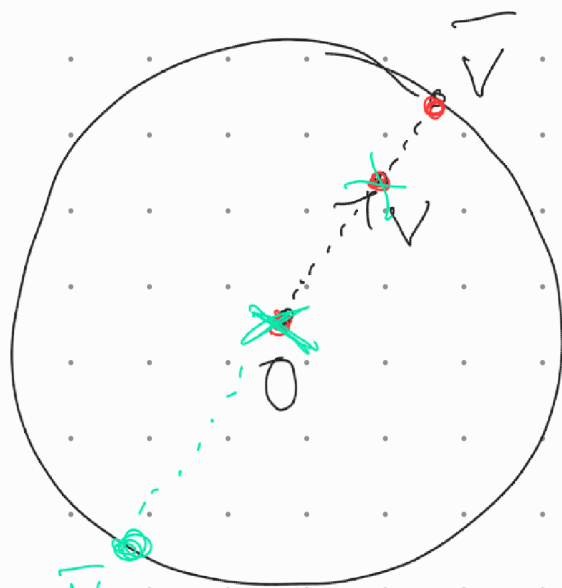
$$\exists r > 0$$

$$M > 0$$

$$\sup_{|x| \leq r} f(x) \leq M$$

$$v \in \overline{B_r(0)}$$

$$\bar{v} = r \frac{v}{|v|}$$



$$v = \lambda \bar{v} + (1-\lambda) \cdot 0$$

$$\text{con } \lambda = \frac{|v|}{r} \in [0,1]$$

$$f(v) \leq \lambda f(\bar{v}) + (1-\lambda) f(0)$$

$$f(v) \leq \frac{|v|}{r} M \quad (I)$$

$$0 = \mu v + (1-\mu) (-\bar{v})$$

$$\text{con } \mu = \frac{r}{|v| + r}$$

$$f(0) \leq \mu f(v) + (1-\mu) f(-\bar{v})$$

1.1
0

$$f(v) \geq -\frac{1-\mu}{\mu} f(-\bar{v})$$

$$(II) \quad f(v) \geq -\left(\frac{|v|}{r}\right) f(-\bar{v}) \geq -\frac{|v|}{r} M$$

$$|f(v)| \leq \frac{M}{r} |v| \quad \Leftarrow (I)(II)$$

Es: Dare una stima per
la costante di Lip.
su una palla centrata
in 0 (event. più piccola!)

Oss: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ convessa

$B = \omega(F)$ F insieme
finito

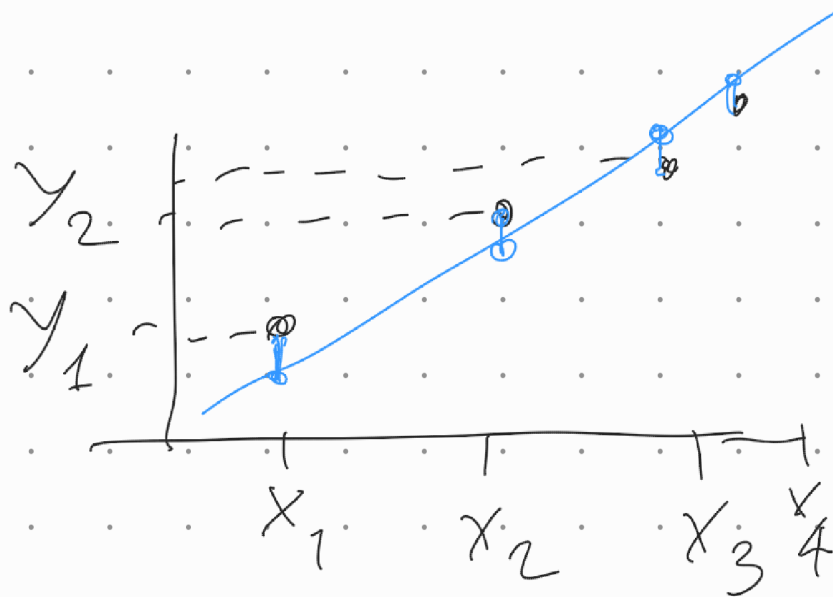
$$\sup_{x \in B} f(x) = \max_{\xi \in F} f(\xi)$$

~~~~~  
RETTE DI REGRESSIONE

$x_1, \dots, x_m$  distinti tra loro

$y_1, \dots, y_m$  valori registrati

$$y = ax + b$$



$$E(a, b) = \sum_{j=1}^m (y_j - (ax_j + b))^2$$



funzionale d'errore

Cerco  $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} E(a, b)$

Oss:  $E(a, b)$  è strett. convessa  
e il minimo esiste

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = - \sum_{j=1}^m 2 (y_j - (ax_j + b)) (x_j)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = - \sum_{j=1}^m 2 (y_j - (ax_j + b))$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 a}(a, b) = + \sum_{j=1}^m 2 x_j^2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial b} (a, b) = \sum_{j=1}^m 2 = 2m$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{j=1}^m x_j$$

$$H_{\mathcal{E}}(a, b) = 2 \begin{pmatrix} \sum x_j^2 & \sum x_j \\ \sum x_j & m \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix}$$

$$u = (1, \dots, 1)$$

$$\det(H_{\mathcal{E}}) = |x|^2 |u|^2 - 2(x \cdot u)^2 \geq 0$$

Disug di CAUCHY-SCHWARTZ

vale il  $>$  perché  $x_i \neq x_j$  per  $i \neq j$

quindi  $\vec{x}$  non è multiplo di  $u$

Come trovare  $a$  e  $b$ ?

$$\partial_a \mathcal{E} = 0 \quad \partial_b \mathcal{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(a, b)}{\partial a} = - \sum_{j=1}^m 2 (y_j - (a x_j + b)) (x_j)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(a, b)}{\partial b} = - \sum_{j=1}^m 2 (y_j - (a x_j + b))$$

$$\sum_j (y_j x_j - a x_j^2 - b x_j) = 0$$

$$\sum_j (y_j - a x_j - b) = 0$$

$u = (\underbrace{1, \dots, 1}_m)$

$$x \cdot y - a |x|^2 - b x \cdot u = 0$$

$$y \cdot u - a x \cdot u - b u^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \cdot u \end{pmatrix}$$

Es: finire il conto del  
hist. lineare

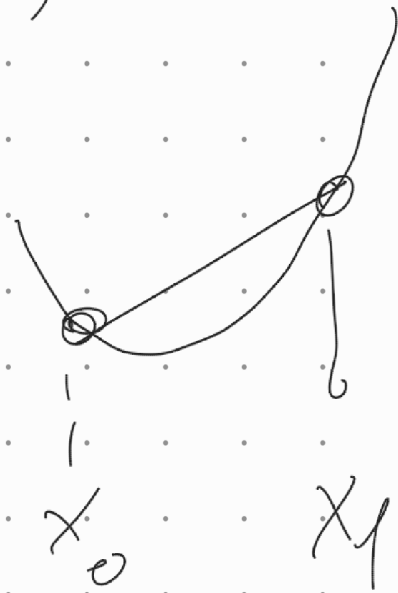
---

Es:  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\Omega$  aperto  
di classe  $C^2$   
 $f$  strettamente convessa  
cioè  
$$f(tx_1 + (1-t)x_0) < tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$$
  
 $\forall t \in (0, 1)$

Allora

$$\nabla f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è localm. invertibile



$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$L_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \}$$

$$(c \in \mathbb{R})$$

1) Mostrare che  $L_c$  è compatto

2) Per quali valori di  $c$   $L_c$  è una curva regolare si scrive localmente come grafico?

$$L_c = f^{-1}(\{c\})$$

m

c



Controlli immagine di un chiuso.

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow \begin{matrix} \text{(*)} \\ \downarrow \\ L_c \\ \text{limita} \end{matrix}$$

$$\forall M > 0 \quad \exists R \text{ t. c.}$$

$$|(x,y)| \geq R \Rightarrow f(x,y) \geq M$$

es. definire

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &\geq \left( \max\{|x|, |y|\} \right)^4 \geq \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right)^4 \\ &\geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{16} \end{aligned}$$

$$|x \cdot y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \doteq r$$

$$f(x, y) \geq \frac{1}{16} r^4 - r^2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{\quad} +\infty$$

Mostare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t \vec{x}) = +\infty$$



$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

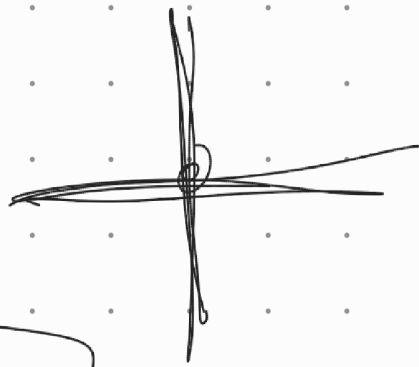
$L_c$  è si scrive come grafico se

$c$  non è un valore critico

Def:  $c$  valore critico se

$$F(x, y) = \begin{cases} \nabla f(x, y) = 0 \\ f(x, y) = c \end{cases}$$

Trovare i valori critici  
punti critici



$c \in \mathbb{R}$  fissato

$$\text{se } \lim_{(x,y) \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

$$\exists R : |(x, y)| \geq R \quad f(x, y) \geq c + 1$$

$$\Rightarrow L_c \cap B_R^\epsilon(0) = \emptyset$$

27 ott 2022

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

●  $L_c$  è un compatto  $\forall c \in \mathbb{R}$

(conseguenza di  $\lim_{|(x, y)| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ )

● OS/ex: Mostrare che  $f$  ha minimo assoluto su  $\mathbb{R}^2$

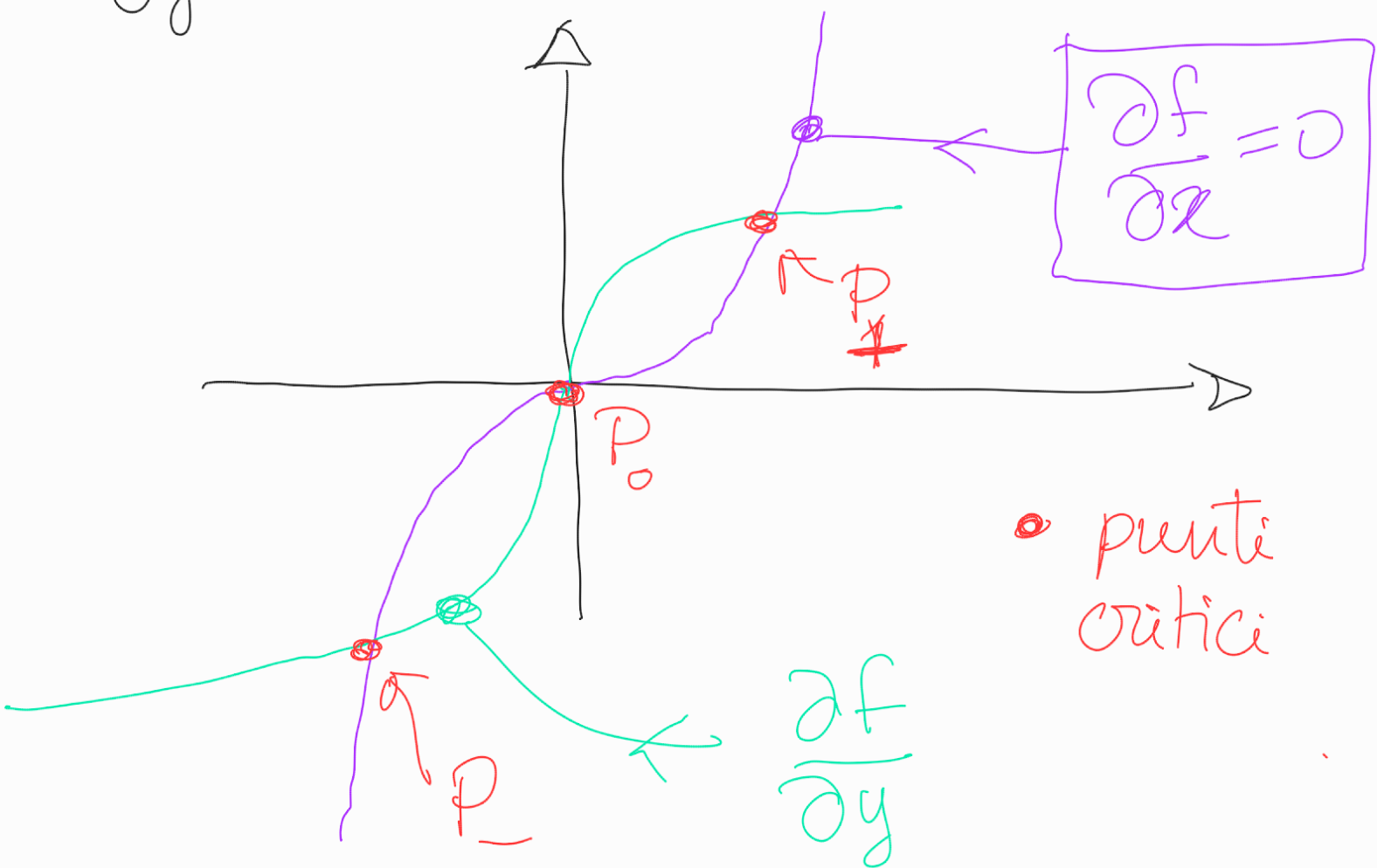
● Quando  $L_c$  è una sottovarietà (di dim 1)?

Serve che se  $p \in L_c$

allora  $\nabla f(p) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 4x$$



$(0,0)$  è un punto di sella

$$f(x, y) = -4xy + o(x^2 + y^2)$$

per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$-2 = f(P_+) = f(P_-)$$

$$f(x, y) = f(-x, -y)$$

sono punti di  
minimo

$$C < -2$$

$$L_C = \emptyset$$

$$C = -2$$

$$L_C = \{P_{\pm}\}$$

$$-2 < C < 0$$

Esercizio:  
Parametrizzare  
la curva  $L_0$   
mediante  
l'intersez.  
con  $y = tx$

$L_C$  è una  
sottov. regolare

$L_0$  non è una  
sottov. regolare

$$y = tx$$

$$C > 0$$

$L_C$  è curva  
regolare



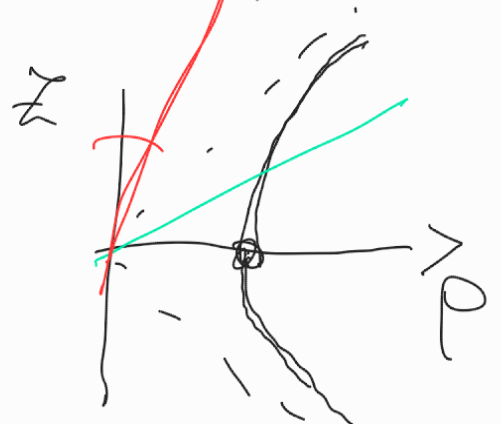
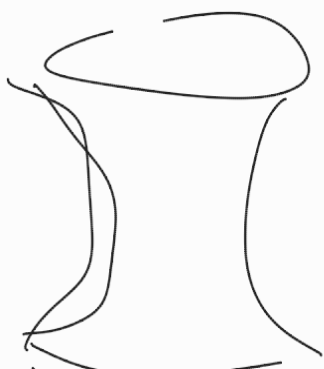
$$\boxed{S} \quad (S) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 & (I) \\ x + y + 2z = 0 & (II) \end{cases}$$

$\Gamma$  punti che soddisfanno  $S$

Trovare max & min di  $f(x, y, z) = z$   
su  $\Gamma$

(II)  $\leadsto$  piano ortogonale  
(1, 1, 2)

(I) In coord cilindriche  $\rho^2 = 1 + z^2$



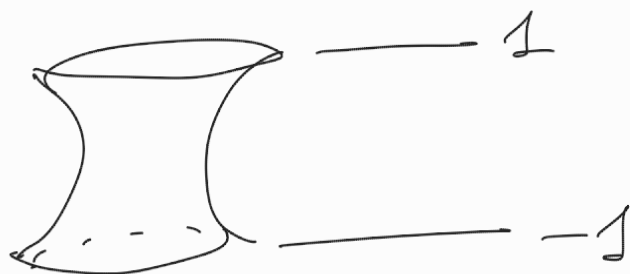


$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + z^2} \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$|x + y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \sqrt{1 + z^2}$$

$$\stackrel{||}{\leq} 2|z|$$

$$4z^2 \leq 2(1 + z^2) \Rightarrow z^2 \leq 1$$



Oss: L'insieme  $\Gamma$  è una  
sottovarietà di dim. 1

$$\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 - 1 \\ x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Gamma = \{ \phi = 0 \}$$

$$\forall p \in \Gamma \quad \text{rk}(\mathrm{D}\Phi(p)) = 2$$

$$D\phi(P) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x - y)$$

$$\text{si annulla} \iff x = y$$

$$\propto P \in \Gamma \cap \{x = y\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = -x$$

$$x^2 + x^2 - (-x)^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$P_{\pm} = (1, 1, -1)$$

$$P_- = (-1, -1, 1)$$

$$D\phi(P_+) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

↑ ha rango 2

$D\phi(P_-)$  ha rango 2

$\Gamma$  è una curva regolare

$$f(x, y, z) = z$$

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$$

$$\varphi_2(x, y, z) = x + y + 2z = 0$$

Se  $(x, y, z)$  è punto staz  
di  $f$  vincolato a  $\Gamma$

allora  $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  t.c.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f = \lambda_1 \vec{\nabla} \varphi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} \varphi_2 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2)$  incognite

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = 2x\lambda_1 + \lambda_2 & \text{I} \\ 0 = 2y\lambda_1 + \lambda_2 & \text{II} \\ 1 = -2z\lambda_1 + 2\lambda_2 & \text{III} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 & \text{IV} \\ x + y + 2z = 0 & \text{V} \end{array} \right.$$

$$\text{III} - (\text{II} + \text{I}) \rightarrow$$

$$(-2z - 2x - 2y)\lambda_1 = 1$$

$$2(x - y)\lambda_1 = 0 \quad \leftarrow (\text{I} - \text{II})$$

|                            |                                                                            |                                                                                                                                                |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{se } \lambda_1 = 0$ | $\text{I} \rightarrow \lambda_2 = 0$<br>$\text{III} \rightarrow x_2 = 1/2$ | $\left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \text{III} \rightarrow x_2 = 1/2 \end{array}} \right\} \text{no sol}$ |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow x = y$$

$$(x, y, z) \in \Gamma \cap \{x=y\}$$

$$\Rightarrow (x, y, z) \in \{P_+, P_-\}$$

definiti prima

$\Rightarrow P_+$  è punto di massimo

$P_-$  è punto di min

$M_{\mathbb{R}}(n \times n)$

matrici reali  $n \times n$   
(sp vett. di dim  $n^2$ )

$$SL(n) = \{A \in M : \det(A) = 1\}$$

È una sottovarietà di dim  $n^2 - 1$

$$\phi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A)$$

$$\phi: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Basta verificare che  
 $\forall A \in SL(n) \quad D\phi(A)$  ha rango 1

Lemma:

$$(i) \quad \det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$(ii) \quad \text{Se } \det A \neq 0 \quad \det(A + \varepsilon H) = \det(A) (1 + \varepsilon \operatorname{tr} A^{-1} H) + \phi(A + \varepsilon H) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$(iii) \quad D\phi(A)[H] = \det(A) \cdot \operatorname{tr}(A^{-1} H)$$

Dim: (iii) segue da (ii)

Perché

$$\begin{aligned} \phi(A + \varepsilon H) &= \phi(A) + \varepsilon D\phi(A)[H] + o(\varepsilon) \\ &= \phi(A) + \varepsilon \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1} H) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

(ii) segue da (i) perché

$$\begin{aligned} \det(A + \varepsilon H) &= \det(A(I + \varepsilon A^{-1}H)) = \overset{\text{Binet}}{\det A \cdot \det(I + \varepsilon A^{-1}H)} \\ &\overset{(i)}{=} \det A \cdot \det(I + \varepsilon \text{tr}(A^{-1}H)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

bastà dimostrare (i)

$$\det \underbrace{(I + \varepsilon H)}_B$$

$$b_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon h_{ij}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} b_{1, \sigma(1)} \cdots b_{n, \sigma(n)} \quad \text{--- (X)}$$

$\varepsilon(\sigma)$  segno della permutaz.

Se  $\sigma \in S_n$  è  $\sigma \neq \text{id}$



allora l'addendo corrispondente

$$\bar{e} = O(\varepsilon^2)$$

$$\odot = b_{11} \cdots b_{nn} + O(\varepsilon^2)$$

$$= (1 + \varepsilon h_{11}) \cdots (1 + \varepsilon h_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \varepsilon (h_{11} + \cdots + h_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + \underbrace{O(\varepsilon^2)}_{=0}$$

$$D\phi(A)[H] = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$$

$$\text{se } A \in \operatorname{SL}(n), \det(A) = 1$$

$$H \mapsto \operatorname{tr}(A^{-1}H) \quad \text{è non deg.}$$

è quindi  
ha rango 1

$$T_{\text{Id}} \text{SL}(n) = \{H \in \mathcal{M} : D\phi(\text{Id})[H] = 0\}$$

$$= \{H \in \mathcal{M} : \text{tr } H = 0\}$$

$$T_A \text{SL}(n) = \{H \in \mathcal{M} : \text{tr}(A^{-1}H) = 0\}$$

————— 0 —————

mostrare che

$$\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n) : {}^t A \cdot A = \text{Id}\}$$

è una sottovarietà di  $\mathcal{M}$

$$\psi(A) = {}^t A A$$

$$\psi : \mathcal{M}(n \times n) \longrightarrow \text{Sym}(n)$$

$$\dim(O(n))$$

||

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

specifier

$$T_{Id} O(n) = \{ H : H + {}^t H = 0 \}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$



2 nov 2022

$$O(n) = \{ {}^t A A = Id \}$$

è una sottovarietà di  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n \times n)$   $\dim \mathcal{M} = n^2$

$$\psi: A \longrightarrow {}^t A A$$

$$\mathcal{M}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{Sym}(n)$$

$D\psi(A)$  ha rango massimo  $\forall A \in O(n)$

$$\begin{aligned} \psi(A+H) &= {}^t(A+H) \cdot (A+H) = {}^t A A + \underbrace{{}^t H A + {}^t A H}_{\text{linear terms}} + o(H) \\ &= \psi(A) + D\psi(A)[H] + o(H) \end{aligned}$$

$$D\psi(A)[H] = {}^t H A + {}^t A H$$

$$D\psi(A): \mathcal{M}(n \times n) \longrightarrow \text{Sym}(n)$$

Devo verificare che  $D\psi(A)$  è sur

①  $D\psi(A)$  è suriettivo

$$\forall S \in \text{Sym}(n) \quad \exists H$$

$$D\psi(\cancel{A})[H] = S$$

$${}^t H \cancel{A} + \cancel{A} H = S$$

basta prendere  
 $H = \frac{1}{2} S$



$$\frac{1}{2} ({}^t S {}^t A A + {}^t A A S) = S$$

$$H = \frac{1}{2} A S$$

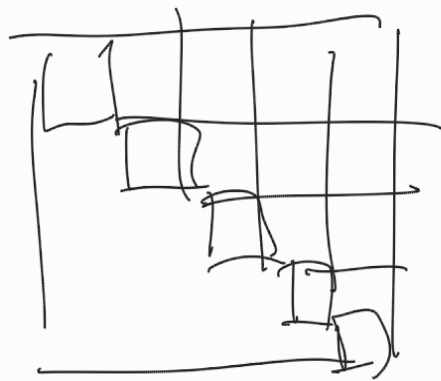
$O(n)$  è una sottovarietà di  
 dimensione  $\dim(M(n \times n)) - \dim(\text{Sym}(n))$

$$O(n) = \psi^{-1}(\text{Id})$$

$$\dim \text{Sym}(n) =$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$



$$\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ex:  $O(2)$

$$T_{\text{Id}} O(2) = \{ {}^t H + H = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ genera } T_{\text{Id}} O(2)$$

$T_{\text{Id}} O(3)$  è generato da

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



trovare max e min di

$$\Phi(A) \doteq \det(A)$$

sull'insieme  $M = \{A \in \mathbb{M} : \text{tr}(^t A A) = n\}$

$$\begin{aligned} g: \mathbb{M}(n \times n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \text{tr}(^t A A) \end{aligned}$$

$$M = g^{-1}(n)$$

$$\Phi|_M$$

Studio il vincolo  $M$

$A = (A_1, \dots, A_n)$   $\swarrow$  vettori colonna

$$\underbrace{^t A A}_M = \begin{pmatrix} ^t A_1 \\ \vdots \\ ^t A_n \end{pmatrix} (A_1, \dots, A_n)$$

$$m_{ij} = {}^t A_i A_j = A_i \cdot A_j$$

$$\text{tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n m_{ii} = \sum |A_i|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$M = \partial B_{\sqrt{n}}(0) \quad \text{in} \quad M(n \times n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

È una varietà regolare  
e compatta

$$x(A_1, \dots, A_n) \in M \Rightarrow (-A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

$$\phi(A) = -\phi(\tilde{A}) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ M \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ A \end{matrix}$$

Per cercare il max



posso restringermi alle  
matrici t.c.:  $\det(A) \neq 0$

Se  $A$  è punto di max/min  
vincolato allora

$$\begin{cases} \text{I} \left( D \phi(A)[H] = \lambda D g(A)[H] \quad \forall H \in \mathcal{M} \right. \\ \text{II} \left( g(A) = n \right. \end{cases}$$

$$(I) \quad \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}H) = \lambda \operatorname{tr}({}^t H A + {}^t A H) \quad \forall H \in \mathcal{M}$$

$$H = A$$

$$\det(A) n = \lambda \operatorname{tr}({}^t A A + {}^t A A)$$

$$\det(A) n = \lambda \cdot 2n \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \det(A)$$

$$g(A) = \operatorname{tr}({}^t A A) = n$$

$$H = AK$$

$$\det(A) \neq 0$$

$K \in M(n \times n)$  arbitraria

$\Downarrow$   $A$  invertibile

$$\cancel{\det(A)} \operatorname{tr}(K) = \frac{1}{2} \cancel{\det(A)} \operatorname{tr}({}^t K {}^t A A + {}^t A A K) \quad \forall K \in M(n \times n)$$

$$\operatorname{tr}(K) = \operatorname{tr}({}^t A A K) \quad \forall K \in M(n \times n)$$

$$\operatorname{tr}((I - {}^t A A) K) = 0 \quad \forall K \in M(n \times n)$$

• In particolare vale per

$$K = I - {}^t A A$$

$$\text{oss: } \bar{K} = {}^t \bar{K}$$

$$\operatorname{tr}((I - {}^t A A)^2) = 0$$

$$\text{" } \operatorname{tr}({}^t K K) = 0$$

$$\nabla I - tAA = 0$$

$$\nabla A \in O(n)$$

Es. per caso\*  $R_1, \dots, R_n$  positivi fissati

$$M = \{A \in M(n \times n) : |A_i|^2 = R_i^2\}$$

$$A = (A_1, \dots, A_n)$$

Determinare massimo & min

di  $\Phi(A) = \det(A)$  ristretto  
a  $M$

CAUCHY-SCHWARTZ via Lagrange

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi_0(x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

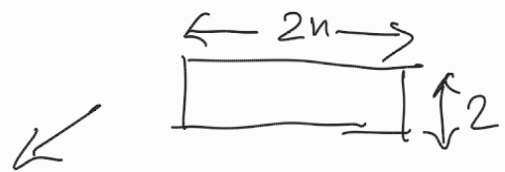
$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} |x|^2 = 1 \\ |y|^2 = 1 \end{array} \right\}$$

1) Mostrare che  $M$  è varietà regolare

2) determinare max e min di  $\psi|_M$

$$M = g^{-1}(1, 1) \quad g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} |x|^2 \\ |y|^2 \end{pmatrix}$$



$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} 2^t x & 0 \\ 0 & 2^t y \end{pmatrix}$$

$Dg(x, y)$  ha rango massimo

$$\forall (x, y) \in M$$

$$|x|^2 = 1 \Rightarrow {}^t x \neq 0 \Rightarrow \text{ha comp} \neq 0$$

$$|y|^2 = 1 \Rightarrow {}^t y \neq 0 \Rightarrow \text{ha comp} \neq 0$$

Questo permette di indiv.

un minore  $2 \times 2$  con  $\det \neq 0$

$$\Rightarrow \text{rango } Df(x, y) = 2$$

2) Osservo che  $M$  è  
varietà compatta  $\Rightarrow$   
max & min esistono

$$(*) D\psi(x, y) = \lambda_1 Dg_1(x, y) + \lambda_2 Dg_2(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x, y) = y_k$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_k}(x, y) = x_k$$

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$g_1(x, y) = |x|^2$$

$$g_2(x, y) = |y|^2$$

$$\textcircled{*} \quad \begin{cases} y_k = \lambda_1 2x_k + \cancel{\lambda_2 \cdot 0} \\ x_k = \cancel{\lambda_1 \cdot 0} + \lambda_2 2y_k \end{cases}$$

$$1 \leq k \leq n$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = 2\lambda_1 \sum x_k^2$$

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = 2\lambda_2 \left( \sum y_k^2 \right)$$

$$\Downarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$$

$$C = 2\lambda_1 = 2\lambda_2$$

(a meno che  
il prodotto  
sia  
nullo)

$$y_k = c x_k$$

$\forall k$

$$x_k = c y_k$$

$$\Rightarrow x_k = c^2 x_k$$

$$\Rightarrow c \in \{0, 1, -1\}$$

$$0 \quad x = y = 0$$

$$\text{oppure} \quad x_k = y_k \quad \forall k$$

$$\text{oppure} \quad x_k = -y_k \quad \forall k$$

Ritorno Cauchy-Schwarz

$$\langle x, y \rangle \leq |x| |y|$$

e vale  $l' = \Leftrightarrow x$  è multiplicità ~~di~~

Tra tutte le scatole  
a forma di parallelepipedo  
di superficie esterna  
assegnata trovare quella  
di volume Max.

(3d)

---

$x, y, z$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vol} (x \cdot y \cdot z) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sup. esterna} = xy + yz + xz = Q^2 \end{array} \right.$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$z > 0$$

$Q_+ \leftarrow$  aperto

ci interessa il  
max



$$\Gamma = \{ (x, y, z) : xy + yz + xz = a^2 \}$$

$\Gamma \cap \mathbb{Q}_+$  è una sottovarietà  
di  $\mathbb{R}^3$

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$\nabla g(x, y, z) \neq \underline{0} \quad \forall (x, y, z) \in \Gamma \cap \mathbb{Q}_+$$

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

(anzi, tutte le comp. sono  
non nulle)

$\Gamma \cap \mathbb{Q}_+$  è chiuso  
non è compatto



$$(x, y, z) \in \mathbb{I} \cap \mathbb{Q}_+ \text{ e}$$

Se una delle coordinate  
è più grande di  $R$

allora

$$x \cdot y \cdot z \leq \frac{a^4}{R}$$

infatti se  $x > R$

$$x \cdot z \leq a^2 \Rightarrow z \leq \frac{a^2}{x}$$

$$x \cdot y \leq a^2 \Rightarrow y \leq \frac{a^2}{x}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z &\leq x \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{a^2}{x} \leq \frac{a^4}{x} \\ &\leq \frac{a^4}{R} \end{aligned}$$

$$\max_{\Gamma \cap Q_+} \text{Vol} = \max_{\Gamma \cap Q_R^+} \text{Vol}$$

$$Q_R^+ = \left\{ (x, y, z) \in Q^+ : \begin{array}{l} |x| \leq R \\ |y| \leq R \\ |z| \leq R \end{array} \right\}$$

se  $p$  è massimo allora

$$\nabla \text{Vol}(p) = \lambda \nabla g(p)$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} yz = \lambda (y+z) \\ xz = \lambda (x+z) \\ xy = \lambda (x+y) \\ xy + yz + xz = a^2 \end{array} \right.$$

4 eq      4 incognite

Sommando

$$yz + xz + xy = \lambda (2x + 2y + 2z)$$

$a^2$

$$\lambda \neq 0$$

$$\frac{\text{I}}{\text{II}} \quad \frac{y}{x} = \frac{\cancel{y} + z}{x + \cancel{z}}$$

$$(\cancel{y} + z)y = (\cancel{y} + z)x$$

$$zy = zx \Rightarrow x = y$$

con lo stesso metodo

$$y = z$$

Es: Stesso problema



parallelepipedo

se n'è coperto

FS<sub>2</sub>: Trovare la Lettina  
di vol massimo  
(e sup. esterne assegnata)



3 nov 2022

$$f(x, y, z) = x y^2 z^3$$

$$D = \{ |x| + |y| + |z| \leq 1 \}$$

↖ compatto  $\Rightarrow$  max & min  
esistono

① Cerco punti staz. liberi  
per  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x y z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3x y^2 z^2$$

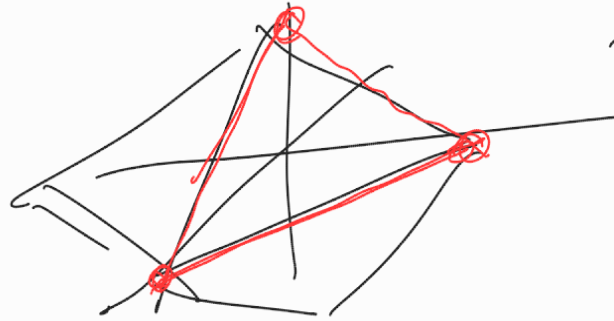
$$\boxed{\nabla f(x, y, z) = 0?}$$

$$\text{sa } \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

ma tali punti  
critici non  
sono né minimi  
né max

~~adesso~~ in  $\text{int}(D)$  non cadono  
punti di max o min relativo

② Max e min di  $f$   
 ristretta a  $S = \{|x| + |y| + |z| = 1\}$   
 $\nwarrow$  ottaedro  
 regolare



Oss: Per determinare max e min  
 ① di  $f$  su  $S$  basta determinare  
 massimi e minimi di  $f$  su

$$S \cap Q = \{(x, y, z) : \boxed{x + y + z = 1}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$(x, y, z) \in S \Rightarrow |f(x, y, z)| = f(|x|, |y|, |z|)$$

Oss<sub>2</sub>: dato che  $f = 0$  su

$$\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$$

$\Rightarrow$  basta cercare max e min

di  $f$  vincolata a  $x+y+z=1$   
con  $x>0, y>0, z>0$

$$g(x, y, z) = x + y + z$$

$$\nabla g \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y^2 z^3 = \lambda \\ 2xy z^3 = \lambda \\ 3xy^2 z^2 = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{I + II} \rightarrow y^2 z^3 = 2xy z^3$$
$$y = 2x$$

$$\boxed{I + III} \rightarrow y^2 z^3 = 3xy^2 z^2$$
$$z = 3x$$



$$(x, 2x, 3x)$$

$$x + 2x + 3x = 1$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è massimo di  
 $f|_{\text{SnQ}}$

Conclusione:

$$\max_D f = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

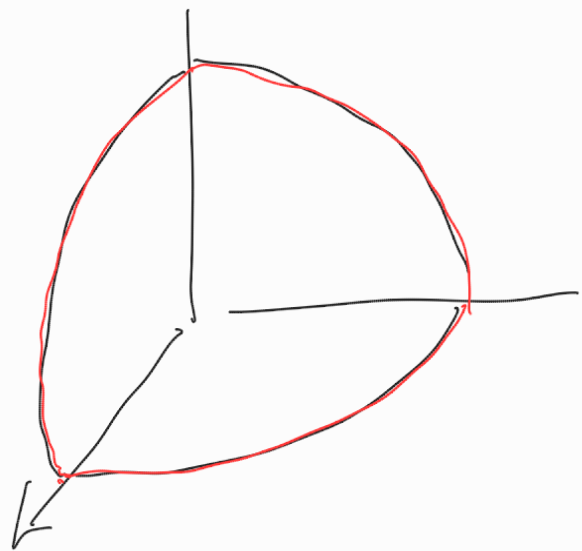
$$\min_D f = -f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$



$$f(x, y, z) = \log x + 2 \log y + 3 \log z$$

$$S = \mathbb{Q}_+ \cap \{x^2 + y^2 + z^2 = 12\}$$

Det. inf & sup  $f|_S$



Oss:  $S$   
non è compatta

ma

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow p \in \partial S \\ p \in \mathbb{Q}_+}} f(x,y,z) = -\infty$$

$$\inf_{f|_S} f = -\infty$$

$$\exists \max f|_S = \max f|_{S_\delta}$$

$$S_\delta = S \cap \{x \geq \delta, y \geq \delta, z \geq \delta\}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1/x \\ 2/y \\ 3/z \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1/x = 2\lambda x \\ 2/y = 2\lambda y \\ 3/z = 2\lambda z \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 12$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x^2 \\ 2 = 2\lambda y^2 \\ 3 = 2\lambda z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 \end{cases}$$

⊕

$$6 = 2\lambda (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$6 = 2 \cdot \lambda \cdot 12$$

$$\lambda = 1/4$$

$$1 = \frac{1}{2} x^2 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$2 = \frac{1}{2} y^2 \rightarrow y = 2$$

$$3 = \frac{1}{2} z^2 \rightarrow z = \sqrt{6}$$

$(\sqrt{2}, 2, \sqrt{6})$  è il massimo  
di  $f|_S$

---

$$\begin{cases} x^4 + y^4 \leq 1 \\ f(x, y) = x + 8y \end{cases}$$

[...]

(FILE INCOMPLETO CAUSA  
SHUTDOWN DEL TABLET)

11 nov 2022

oss

$Q$  forma quadratica su  $\mathbb{R}^n$   
(~~pe~~ omogeneo di grado 2)

max e min di  $Q$  ristretti a  $S = \{|x|^2 = 1\}$

Allora i punti staz. vincolati che trovo  
col metodo dei moltip di Lagrange  
sono autovettori di  $H = H_Q$  matrice Hesseiana  
di  $Q$

①  $Q$  è  $C^\infty$  quindi  $H$  è simmetrica

②  $Q(x) = \frac{1}{2} (Hx) \cdot x + \cancel{\dots}$

③  $Q(x+v) = \frac{1}{2} (H(x+v)) \cdot (x+v) = \frac{1}{2} [Hx \cdot x + Hx \cdot v + Hv \cdot x + o(|v|^2)]$

$$Hv \cdot x = v \cdot {}^t Hx = {}^t Hx \cdot v$$

$$= \frac{1}{2} Hx \cdot x + \frac{1}{2} [(H+{}^t H)x] \cdot v + o(|v|^2)$$

moltip. di Lagrange

$$= Q(x) + \nabla Q(x) \cdot v + o(|v|^2)$$

↓

$$\begin{cases} Hx = 2\lambda x \\ |x|^2 = 1 \end{cases}$$

$$\nabla Q(x) = Hx$$



$x$  è autovettore di  $H$   
con autovalore  $2\lambda$

Domanda: Se  $\Omega$  è aperto limitato in  $\mathbb{R}^N$

$$|\partial\Omega| = 0$$

No, controesempio in dimensione 1

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon/2^n}(q_n) \quad [0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \\ \varepsilon > 0$$

$$x \in [0,1] \setminus \Omega \Rightarrow x \in \partial\Omega$$

cioè

$$\partial\Omega \supset [0,1] \setminus \Omega$$

$$|\partial\Omega| \geq 1 - |[0,1] \cap \Omega|$$

$$[0,1] = [0,1] \cap \Omega \cup ([0,1] \setminus \Omega) \\ 1 = |[0,1] \cap \Omega| + |[0,1] \setminus \Omega|$$

$$|\Omega| \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon 2^{-n} \leq 2\varepsilon$$

Vl

$$|[0,1] \cap \Omega|$$

$$\text{se } \varepsilon < 1/2 \\ |\partial\Omega| > 0$$

— 0 —

$\Omega$  limitato

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > 0\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{con } f \text{ di classe } C^1 \\ \nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \Rightarrow |\partial\Omega| = 0?$$

$$\partial\Omega \subseteq \{x: f(x) = 0\}$$



$x \in \partial\Omega \Rightarrow f(x) = 0$  e  $x$  ha un intorno

$V_x$  tale che  $\partial\Omega \cap V_x$  è grafico di una funzione (per il Teorema delle funz. implicite)

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} V_x$$

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_i V_{x_i} \quad \hookrightarrow \text{per compattezza di } \partial\Omega$$

Basta verificare che  $|\partial\Omega \cap V_{x_i}| = 0 \quad \forall i$

Basta verificare che se

$$\varphi: B \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

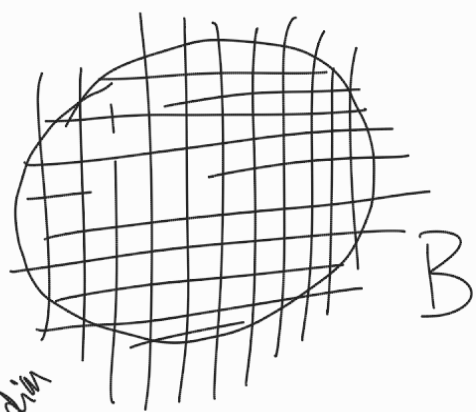
$\hookrightarrow$  palla chiusa

$$\{(x, \varphi(x)) \mid x \in B\} = G \text{ ha misura nulla}$$

Basta inscrivere in un'unione di rettangoli di misura prob.



$$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta : |x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$$



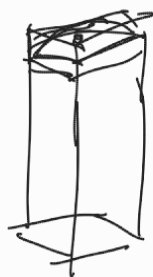
$$B \subset \bigcup_{i=1}^m Q_i \quad \text{diam}(Q_i) < \delta$$

$$G = \bigcup \underbrace{\{(x, \varphi(x)) : x \in B \cap Q_i\}}_{G_i}$$

$x_i \in B \cap Q_i$  fissato

$$G_i \subset (B \cap Q_i) \times (\varphi(x_i) - \varepsilon, \varphi(x_i) + \varepsilon)$$

$$|G_i| \leq |Q_i| (2\varepsilon)$$



$$\sum_{i=1}^m |Q_i| \approx |B|$$

misura  $(n-1)$ -dimensionale

$$|G| \leq \sum |G_i| \leq c |B| 2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Prop: Se  $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$  e  $|A| > 0$

Allora  $\exists V \subset A$  t.c.  $V \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$

$$Q_0 = [0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} Q_0 + \xi$$

$$A = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} A \cap (Q_0 + \xi)$$

$$\exists \bar{\xi} \in \mathbb{Z}^N \text{ t.c. } |A \cap (Q_0 + \bar{\xi})| > 0$$

$$0 < |A| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Q}^N} |A \cap (\mathbb{Q}_0 + \xi)| \quad \rightarrow$$

SPG posso supporre che  $A \subseteq \mathbb{Q}$

su  $A$  definisco rel. di eq  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^N$

$$\varphi: A/\sim \rightarrow A$$

$$V \doteq \varphi(A/\sim) \subset A$$

$$\text{oss } \left. \begin{array}{l} v_1, v_2 \in V \\ v_1 \neq v_2 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}$$

$$A \subseteq \bigcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} (V + \xi)$$

$$\sqrt{N} = \text{diam}([0,1]^N)$$

se supp. per assurdo  $V$  misurabile

$$0 < |A| \leq \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V + \xi| = \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V|$$

$$\Rightarrow |V| \neq 0$$

è un'unione disgiunta

$$V + \xi_1 \cap V + \xi_2 \neq \emptyset$$

$$v_1 + \xi_1 = v_2 + \xi_2$$

$$\exists v_1, v_2 \in V$$

$$\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Q}^N \cap |\xi| \leq \sqrt{N}$$

$$v_1 - v_2 = \xi_2 - \xi_1 \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$$

è limitato  
ha misura finita

$$\left| \bigcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} V + \xi \right|$$

$$= \sum |V| = +\infty$$

assurdo ~~##~~

---

Esercizio: mostrare che

$$\text{se } A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$$

$$\text{e } |A| > 0$$

allora  $A-A$  è un intorno  
di 0

$$A-A = \{x = a - a' \text{ con } a, a' \in A\}$$

0

Esiste un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$

$$|A| = 0$$

tale che  $A-A$  è intorno  
di 0

$C$  è l'insieme di Cantor

$$C - C \supset [-1, 1]$$

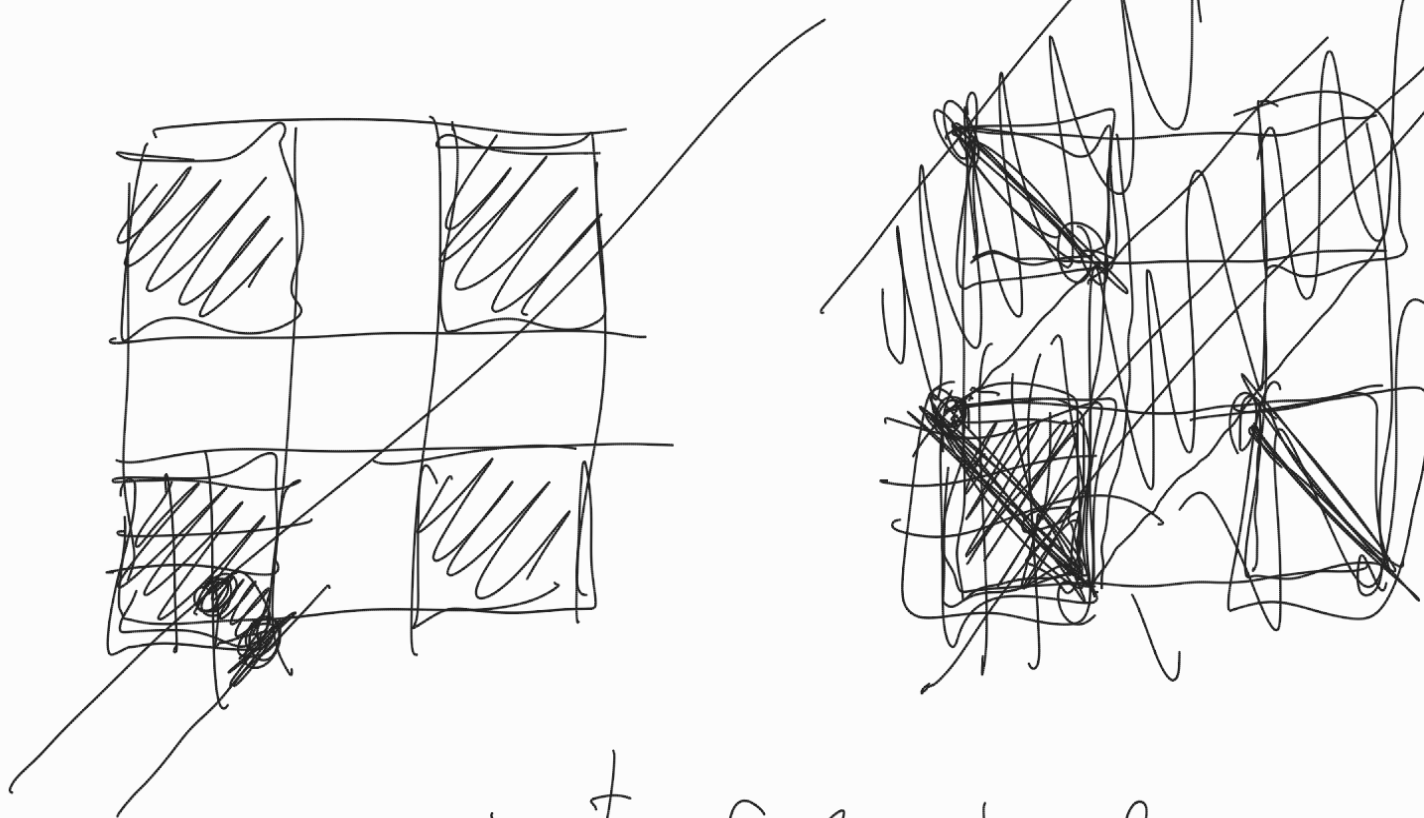
$$C \times C \in [0, 1] \times [0, 1]$$



$$a \in [-1, 1],$$

$$R = \{x - y = a\}$$

$$R \cap C \times C \neq \emptyset \iff a \in C - C$$



$r$  interseca uno  
dei quadrati di  
ordine 1

$$\uparrow$$

$$Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i \neq \emptyset$$

$(\bar{x}, \bar{y})$   $\nwarrow$  per compattezza

e tale  $(\bar{x}, \bar{y}) \in C \times C$

Se  $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$

famiglia di  
chiusi  
in  $X$  sp.  
compatto

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A}$

$$F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$$

17nov2022

$A \subseteq \mathbb{R}^n$  misurabile  $\Rightarrow A-A$  è un intorno di 0  
 $|A| > 0$

Dim: S.P.G. posso supporre  $A$  compatto  
(altrimenti sostituisco  $A$  con  $A_0 \subset A$   
 $A_0$  compatto,  $|A_0| > 0$ )

Pre regolarità (esterna)  $\exists G$  aperto  
 $G \supset A$

$$|G| < 2|A|$$

$$d(A, G^c) > 0$$



$$d(x, G^c)$$

$$\min_{x \in A} d(x, G^c) > 0$$

$$0 < \varepsilon < d(A, G^c)$$

$$|v| < \varepsilon$$

$$B(0, \varepsilon) \subset A-A$$

$$A \subset G$$

$$(A+v) \subset G$$

Se per assurdo

$$A \cap (A+v) = \emptyset$$

$$A \cup (A+v) \subset G$$

$$|A \cup (A+v)| = |A| + |A+v| = 2|A| > |G|$$

→ ASSURDO!

$$\Rightarrow A \cap A+v \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} \exists a \in A \\ \exists a' \in A : a = a' + v \Rightarrow v = a - a' \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \bigcirc \Longleftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} X \text{ metrico COMPATTO} \\ \mu \text{ misura di Borel} \\ \mu(X) < +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \mu \text{ \u00e8 regolare}$$

*senza questa ... compatto \u2192 chiuso*



Cioè  $\forall A \in \mathcal{B}$

$$\mu(A) = \inf \left\{ \mu(G) : \begin{array}{l} G \text{ aperto} \\ G \supset A \end{array} \right\} = \sup \left\{ \mu(K) : \begin{array}{l} K \text{ chiuso} \\ K \subset A \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{B} : A \text{ soddisfa } (*) \}$$

(i)  $\mathcal{S}$  è una  $\sigma$ -algebra

(ii)  $\mathcal{S}$  contiene gli aperti

$$\text{oss: } (i) + (ii) \Rightarrow \mathcal{S} \supset \mathcal{B}$$

$$(a) \emptyset \in \mathcal{S}, X \in \mathcal{S}$$

$$(b) B \in \mathcal{S} \Rightarrow B^c \in \mathcal{S}$$

$$\begin{aligned} \mu(B^c) &= \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \inf \left\{ \mu(G) : \begin{array}{l} G \supset B \\ G \text{ aperto} \end{array} \right\} \\ &= \mu(X) + \sup \left\{ -\mu(G) : \begin{array}{l} G \supset B \\ G \text{ aperto} \end{array} \right\} \\ &\stackrel{||}{=} \mu(X \setminus B) \end{aligned}$$

$$= \sup \{ \mu(X) - \mu(G) : \begin{matrix} G \supset B \\ G \text{ apato} \end{matrix} \}$$

$$= \sup \{ \mu(F) : \begin{matrix} F \subset B^c \\ F \text{ chiuso} \\ (\text{compatto}) \end{matrix} \}$$

$$F = X - G$$

$\Rightarrow$  regolarità interna  
per  $B^c$

(La regolarità  
esterna ~~deriva~~ deriva da reg interna  
per  $B$ )

x esercizio

$$(c) \begin{matrix} A_i \in \mathcal{S} \\ \forall i \in \mathbb{N} \end{matrix} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{S}$$

SPG posso supporre  $A_i$  disgiunti

$$\left[ \begin{array}{l} \text{se non lo fossero, uso } A'_i \doteq A_i \setminus \left( \bigcup_{j < i} A_j \right) \\ \bigcup A'_i = \bigcup A_i \end{array} \right]$$

Reg. interna  $\varepsilon > 0$  fissato

$$\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i) < +\infty$$

~~mi~~ scelgo  $n$  i. c.  $\sum_{i \geq n} \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall i \quad \exists K_i \subset A_i \quad \mu(K_i) > \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2n}$$

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i \text{ è tale che } K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(K_i) > \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$> \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$$

— o —

$$\varepsilon > 0$$

$$\forall i \quad \exists G_i \supset A_i \text{ con } \mu(G_i) < \mu(A_i) + \varepsilon 2^{-i}$$

$G_i$  aperto

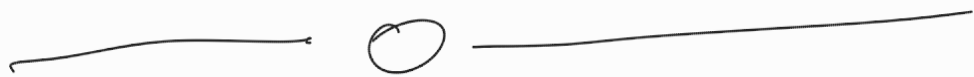
$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon$$

(1)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{S}$$



(ii)  $\mathcal{S}$  contiene i chiusi

$K$  chiuso  $\mu(K) = \sup \{ \mu(C) : C \subset K, C \text{ chiuso} \}$

$\nearrow$  ovvia

$$\mu(K) = \inf \{ \mu(G) : G \supset K \}$$

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

$$G_n \doteq \{x \in X : d(x, K) < \frac{1}{n}\}$$

$\uparrow$  aperti

$$G_{n+1} \subset G_n$$

$$\mu(K) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n)$$

da cui la tesi



## COROLLARIO

In  $\mathbb{R}^N$ ,  $\mu$  misura di Borel  
t.c.

$$\mu(K) < +\infty \quad \forall K \text{ compatto}$$

$\Rightarrow \mu$  è regolare

Dim: Se  $A$  limitato

$$\mu(A) = \inf \left\{ \mu(G) \begin{array}{l} G \text{ aperto} \\ G \supset A \end{array} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \mu(K) : \begin{array}{l} K \text{ comp} \\ K \subset A \end{array} \right\}$$

per il risultato precedente

Se  $A$  non è limitato  
posso scriverlo come unione  
numerabile di limitati  
e concludere con le  
solite tecniche

(dettagli per esercizio)

TEO: Se  $\mu$  mis di Borel  
in  $\mathbb{R}^N$  t.c.

$$\mu(K) < +\infty \quad \forall K \text{ compatto}$$

$$\mu(A) = \mu(A+v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+ : \mu = c \lambda$$

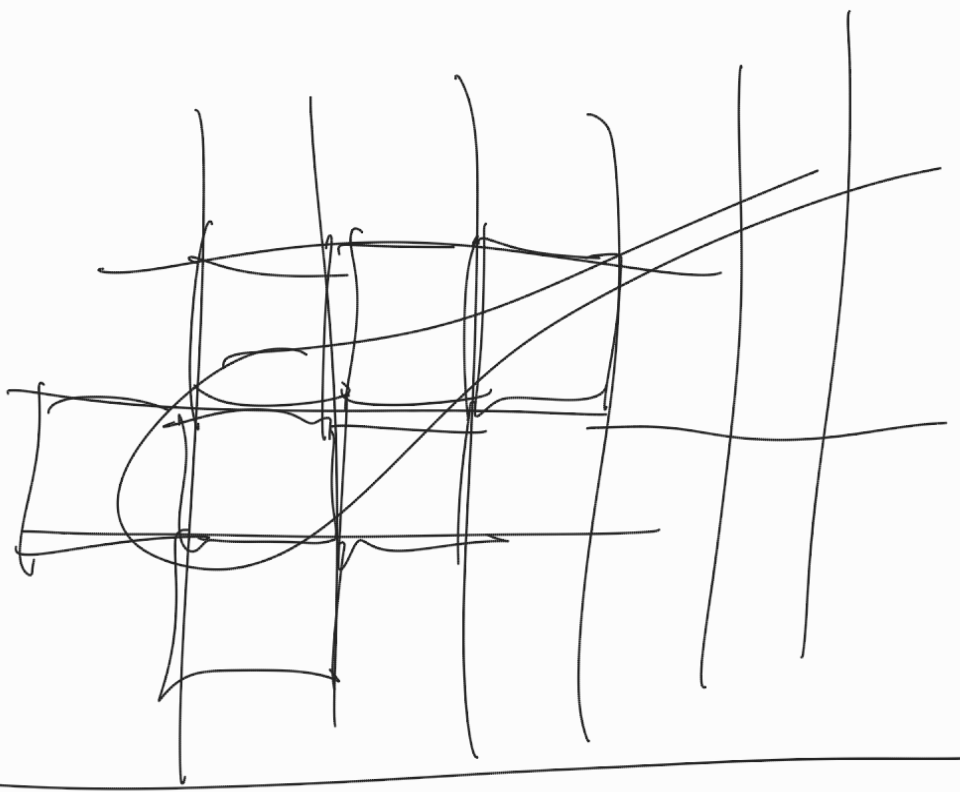
————— 0 —————

$\uparrow$  leb.

Dis SPG posso supporre

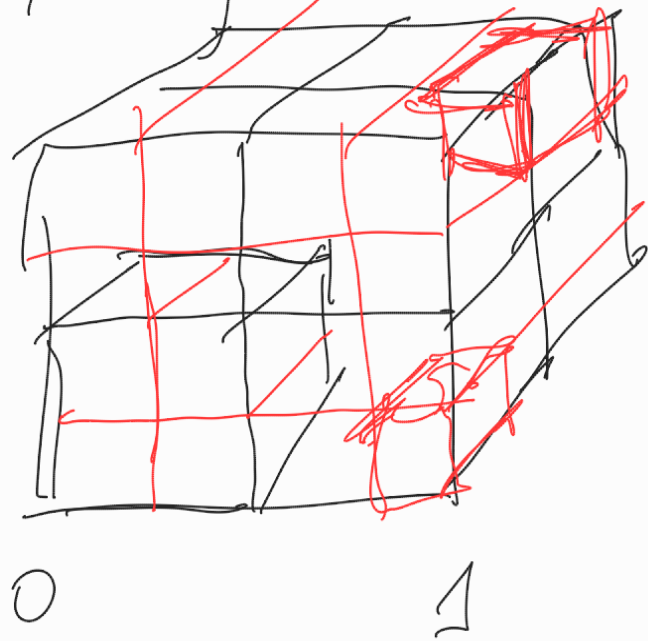
$$\mu([0,1]^N) = 1$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{se for } \mu([0,1]^N) = p > 0 \\ \frac{1}{p} \mu \quad ; \quad \text{se } p = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array} \right)$$



Suppongo  $\mu([0,1]^N) = 1$

$$\mu\left([0, \frac{1}{2}]^N\right)$$



$$[0,1]^N = \bigsqcup_{\xi \in \left[\frac{1}{2}\right]_k} \xi + [0, \frac{1}{2}]^N \quad (\star)$$



$$\boxed{\cdot}_k = \left\{ (\xi_1, \dots, \xi_N) : \xi_i = m_i 2^{-k} \right. \\ \left. 0 \leq m_i \leq 2^k - 1 \right\}$$

$\uparrow$   
 $2^{Nk}$

$$\textcircled{*} \quad \mu([0, 1]^N) = \sum_{\xi \in \boxed{\cdot}_k} \mu(\xi + [0, 2^{-k}]^N)$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \downarrow$$

$$1 \quad \quad \quad = 2^{Nk} \mu([0, 2^{-k}]^N)$$

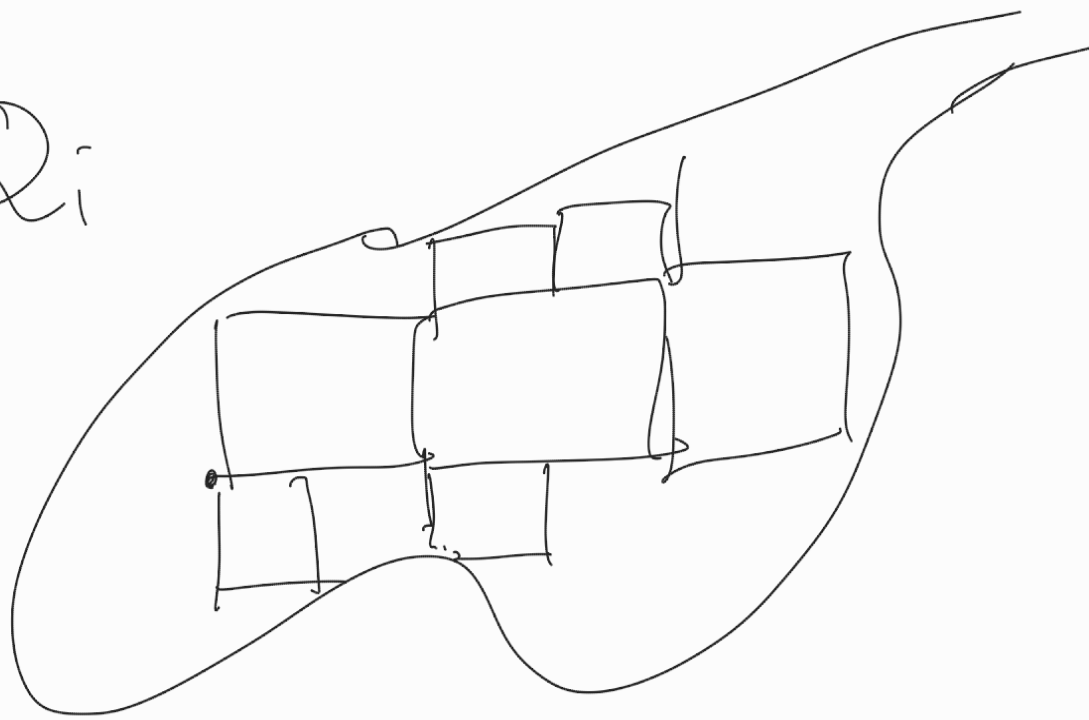
$$\mu([0, 2^{-k}]^N) = 2^{-Nk} = \lambda([0, 2^{-k}]^N)$$

Allora  $\forall A$  aperto

$$\mu(A) = \lambda(A)$$

Perché ogni  $A$  aperto  
 si scrive come  
 unione numerabile di cubetti

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$$



$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(Q_i) = \sum \lambda(Q_i) = \lambda(A)$$

$E$  è Boreliano

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(A) : \begin{array}{l} A \supset E \\ A \text{ aperto} \end{array} \right\}$$

$$= \inf \{ \lambda(A) : A \supseteq E, A \text{ aperto} \}$$

$$= \lambda(E) \quad \text{~~non~~}$$


---

Es 1: Mostrare che se  $V$  di  
vitali,  $A \subseteq V$

$$A \text{ misurabile} \Rightarrow |A| = 0$$


---

$$\text{se } f \in L^1(\mathbb{R})$$

Può succedere che  $\forall A$  aperto

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$


---

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \doteq B < +\infty$$


$$\mathbb{Q} = \{x_n : x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2} \varphi(x - x_n) \right)$$

$\varphi_n$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \varphi_n \quad \text{è mis.}$$

$$f(x) = \sup_k S_k \quad \text{è mis.}$$

$$f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \int \sup_K S_K &= \sup_K \int S_K \\ &\stackrel{||}{=} f \\ &= \sup_K \sum_{n=1}^K \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - r_n) dx \\ &= B \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \end{aligned}$$

Esercizio: mostrare che  
 $\forall M \in \mathbb{R}$

$\{f(x) \leq M\}$  è chiuso

Es: È vero che  $|f_n| \leq 1$   
 $\int_0^1 |f_n - f| dx \rightarrow 0$

allora  $f_n(x) \rightarrow f(x)$   
quasi ovunque?

(No, ma esiste una ~~serie~~  
con questa prop.)

es: trovare un controesempio

Ricondurre l'integrale

$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$  al calcolo  
di una serie

→ metodi di anal I

→ Beppo-Levi

---

22 nov 2022

con sequenza

TEO:  $\mu$  mis di Borel (regolare) su  $\mathbb{R}^N$   
t. c.  $\mu(K) < +\infty$   $\forall K$  compatto

$\forall f$  misurabile con  $\int_{\mathbb{R}^N} |f| < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$  t. c.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$$

●  $C_c(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ t. c. } \left. \begin{array}{l} \exists K \text{ compatto t. c.} \\ f(x) = 0 \\ \forall x \notin K \end{array} \right\} \right.$

↑ funzioni continue a supporto compatto

Es: Determinare la chiusura di  $C_c(\mathbb{R}^N)$   
rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$

LEMMA: Se  $A \in \mathcal{B}$  (boreliano)  $\subseteq \mathbb{R}^N$   
Nelle ipotesi del teo. precedente

Allora  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi$  continua t. c.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi - \chi_A| d\mu < \varepsilon$$



Dim: Dato che  $\mu$  è mis regolare, dato  $\varepsilon > 0$

$$\exists K \subset A \subset G$$

↑  
compatto

↖ aperto

tali che  $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$

$$\varphi(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, K)} \geq 0$$

oss: tutte le quantità sono non negative  
denominatore  $> 0$

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

$$\varphi(x) = \chi_A(x) \text{ se } x \notin G \setminus K$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A| d\mu = \int_{G \setminus K} |\varphi - \chi_A| d\mu \leq \mu(G \setminus K) < \varepsilon$$

oss: Se  $A$  è limitato questa  $\varphi$  può essere presa a supporto compatto

se  $A \subset B_R(0)$  basta prendere  $G \cap B_R(0)$

— o —

Dim Teo: S P G posso supporre  $f \geq 0$

$$\int f d\mu < +\infty$$

(verificare per  
esercizio)

$f \chi_{B_n(o)} \longrightarrow f$  q.o.  
e sono dominate da  $f$

$$\int f \chi_{B_n(o)} d\mu \longrightarrow \int f d\mu$$

$$\exists n_0 : \int |f - \underbrace{f \chi_{B_{n_0}(o)}}_{\psi}| d\mu < \varepsilon/3 \quad \underline{\psi \in L^1}$$

Per definizione di integrale

$$\exists S = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j} \quad (A_j \text{ misurabili})$$

&

t.c.  $0 \leq S \leq \psi$

$$A_j \subseteq B_{n_0}(o)$$

$$c_j > 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi - S| d\mu < \varepsilon/3$$

$$C \doteq \sum_{j=1}^m c_j$$

$\forall j$  prendo  $K_j \subset A_j \subset G_j$

← compatto

← aperto

tali che  $\mu(G_j \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{3C}$

$$e \varphi_j(x) = \frac{d(x, G_j^c)}{d(x, G_j^c) + d(x, K_j)}$$

$$\int |S - \sum c_j \varphi_j| d\mu = \int |\sum_{j=1}^m c_j (\chi_{A_j} - \varphi_j)| d\mu \leq \sum c_j \int |\chi_{A_j} - \varphi_j| d\mu$$

$$\leq \left( \sum_{j=1}^m c_j \right) \frac{\varepsilon}{3C} = \varepsilon/3$$

$$\begin{aligned} \|f - \sum c_j \varphi_j\|_1 &\leq \|f - \psi\|_1 + \|\psi - S\|_1 + \|S - \sum c_j \varphi_j\|_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

Oss  $\sum c_j \varphi_j(x) = 0 \quad \text{se } |x| \geq m_0$

---

Esercizio: Mostrare che se  $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(nx) dx = 0$$

Es: Nelle ipotesi di sopra supe  $\left( \int_{\mathbb{R}^N} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < +\infty$

Allora  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \text{t.c.}$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi|^p d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon$$

# ASSOLUTA CONTINUITÀ dell' INTEGRALE

$(X, \mu)$  sp. di misura

$f$  misurabile e  $\int_X |f| d\mu < +\infty$

Allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ misurabile} \\ \mu(A) < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

Dim: (Per assurdo) suppongo  $\exists \varepsilon_0 > 0$  t.c.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists A_n$  misurabile con  $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$

t.c.  $\int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0$  

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1$$

$$F_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$$

$$F = \bigcap_n F_n$$

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) = 2^{-n+1} \longrightarrow 0$$

$$\mu(F) = \inf \mu(F_n) = 0$$

$$\chi_{F_n}^{(x)} \longrightarrow \chi_F^{(x)} \quad \forall x \in X$$

$A_n \subset F_n$

$$\int_{A_n} |f| d\mu = \int_X |f| \cdot \chi_{A_n}^{(x)} d\mu \leq \int_X |f| \chi_{F_n}^{(x)} d\mu \longrightarrow \int_X |f| \chi_F^{(x)} d\mu \stackrel{!}{=} 0$$

$$(|f| \chi_{F_n^c} \leq |f| \in L^1(X) \quad \text{con dom.}$$

$$\text{def } \int_A f d\mu \stackrel{0}{=} \int_X f \chi_A$$

$$\bullet \int_{A_n} |f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\bullet \int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon_0$$

ASSURDO

Esercizio: Se  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  sp di misura  
 $A_j$  misurabili

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) < +\infty \quad \text{allora}$$

$$\mu\left(\bigcap_n \bigcup_{j \geq n} A_j\right) = 0$$

BOREL-CANTELLI

$(X, \mathcal{M}, \mu)$  sp. di misura

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) \doteq \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R}, \begin{array}{l} f \text{ misurabile} \\ \int_X |f|^p d\mu < +\infty \end{array} \right\}$$

$$f \sim g \iff \exists A \text{ t.c. } \mu(A)=0 \text{ \& } f(x)=g(x) \forall x \notin A$$

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim \doteq L^p(X, \mu)$$

È uno spazio vettoriale **NORMATO**  
&  
**COMPLETO**

rispetto a  $\|f\|_p \doteq \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

$$p \in [1, +\infty]$$

$$(p = \infty) \quad \mathcal{L}^\infty(X) = \left\{ f \text{ misurabile t.c. } \exists c > 0 \right. \\ \left. \mu(x : |f(x)| > c) = 0 \right\}$$

$$L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty / \sim$$

$$\|f\|_\infty \doteq \inf \{ c > 0 : \mu(x : |f(x)| > c) = 0 \}$$

Anche questo è uno sp. vett. normato  
completo

(verificare per esercizio)

$$p \in [1, +\infty[$$

$L^p(X)$  è sp. vett. NORMATO & COMPLETO

[NORMATO]

(i)  $\|f\|_p \geq 0 \quad \forall f$  e val. 0  $\Leftrightarrow f \sim 0$   
 $f = 0$  q.o.

$$\int |f|^p d\mu = 0 \Rightarrow \{|f|^p > 0\} = \bigcup_n \{|f|^p \geq \frac{1}{n}\}$$

$\Downarrow$   
 $f \sim 0$

↑  
 ha mis nulla

↑ hanno tutti mis nulla

(ii)  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$  Linearità dell'integrale

(iii)  $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  (sub-additività)

LEMMA:  $f \in L^p(X), g \in L^q(X) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Disug di Hölder

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (*)$$

DMY:  $\boxed{a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \geq 0}$  disug di Young

dimostro (\*) per  $f_1 \in L^p$  con  $\|f_1\|_p = 1$   
 $g_1 \in L^q$  con  $\|g_1\|_q = 1$

$$\int_X |f_1| |g_1| d\mu \leq \int \left[ \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \right] d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

per (\*) nel caso generale applico questa  $\uparrow$

$$f_1 \doteq \frac{f}{\|f\|_p}$$

$$g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}$$

~~###~~

Dim (iii) sub-additivita'

$$f, g \in L^p$$

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu$$

$\uparrow$   $L^p$        $\uparrow$   $L^q$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$q + p = pq$$

$$q(p-1) = p$$

$$p-1 = p/q$$

$$\leq \int_X |f| |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f+g|^{p-1} d\mu$$

Hölder  $\downarrow$

$$\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f+g|^{p-1} \|_q$$

$\uparrow$

$$\| |f+g|^{p-1} \|_q = \left( \int |f+g|^p d\mu \right)^{1/q}$$

$$\left( |f+g|^{p-1} \right)^q$$

$$p-1 = \frac{p}{q}$$

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p/q}$$



$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

DISUG  
di  
MINKOWSKI

Lo spazio  $L^p(X, \mu)$  è COMPLETO per  $\|\cdot\|_p$

Ogni successione di Cauchy (risp a  $\|\cdot\|_p$ )  
converge (in  $\|\cdot\|_p$ )

$(f_n) \in L^p(X)$  di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \text{ t.c. } \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \\ \forall n, m \geq N$$

$$n_k \doteq N(2^{-k})$$

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$$

USO  
conv. DOM

Verifico che  $f_k \doteq f_{n_k}$  converge  
in  $L^p(X)$

(Da questo segue che tutta la succ.  
 $f_n$  converge allo stesso limite)

$$g_n(x) := |\tilde{f}_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|$$

$$\|g_n\|_p \leq \|\tilde{f}_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p$$

$$g_n \uparrow$$

$$g(x) := \sup g_n(x)$$

$$\int_X g_n(x)^p d\mu \longrightarrow \int_X g(x)^p d\mu$$

BEPPLO LEVI

In particolare  $g(x) < +\infty \quad \forall x \in X$

$$X_0 = \{x: g(x) < +\infty\} \quad \mu(X \setminus X_0) = 0$$

$$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)]$$

$$f(x) \doteq \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)]$$

Se  $g(x) < +\infty$  questa serie è assolutamente convergente

$$|\tilde{f}_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x)$$

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X_0$$

$$\tilde{f}_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X_c$$

$$|\tilde{f}_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \forall x \in X_o$$

$$|\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p g(x)^p \quad \text{CONV. DOM}$$

$$\int_X |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0$$

COR: Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$

$$\Rightarrow \exists \text{ s.succ t.c. } f_{n_k} \rightarrow f \text{ q.o.}$$

$$|f_{n_k}| \leq g \in L^p$$

Controesempio

$$f_k(x) \doteq \chi_{[0,1]}(2^k x - k) \quad 2^{n+1} \leq k \leq 2^{n+1}$$

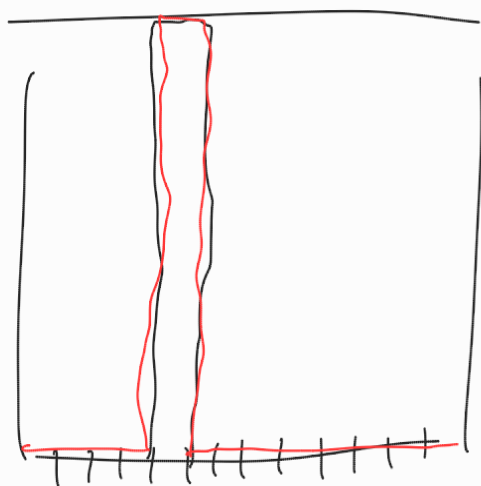
$$f_k \in L^1([0,1])$$

$$\|f_k\|_1 \rightarrow 0$$

ma  $f_k \not\rightarrow 0$  q.o.

VERIFICARE

1



0

1

23 nov 2022

Punto chiave della dim.  
della Completeness di  $L^p$   
è di Cauchy per  $\|\cdot\|_p$

Se  $(f_n)_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$

è di Cauchy per  $\|\cdot\|_p$

allora  $\exists (n_k)_k$  e  $\exists f \in L^p$   $g \in L^p$

t.c.  $f_{n_k} \rightarrow f$  q.o.

$$|f_{n_k}| \leq g$$

quindi  $f_{n_k} \rightarrow f$  in  $L^p$   
e anche  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$

PROP: Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$

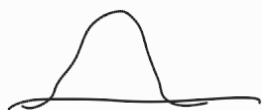
$\Rightarrow \exists$  s.s.u.c.  $f_{n_k} \rightarrow f$  q.o.  
 $\exists g \in L^p$  &  
 $g \geq 0$   $|f_{n_k}| \leq g$

Dim:  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \Rightarrow f_n$  di Cauchy per  $\|\cdot\|_p$

Oss: ①  $f \in C_c(\mathbb{R})$   
 $f \geq 0$   
 $\int f > 0$

$$f_n(x) = f(x-n)$$

$$f_n(x) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$



$f_n \not\rightarrow 0$  in  $L^1$

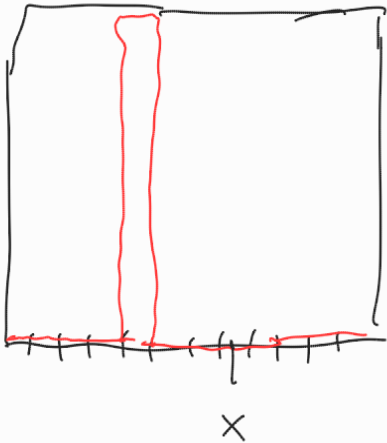
②  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p \not\Rightarrow f_n \rightarrow f$  q.o.

$$2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$$

$$f_k(x) = \chi_{[0,1]}(2^n x - k)$$

$$f_k(x) = 1 \iff 2^n x - k \in [0,1]$$

$$\iff x \in [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$$



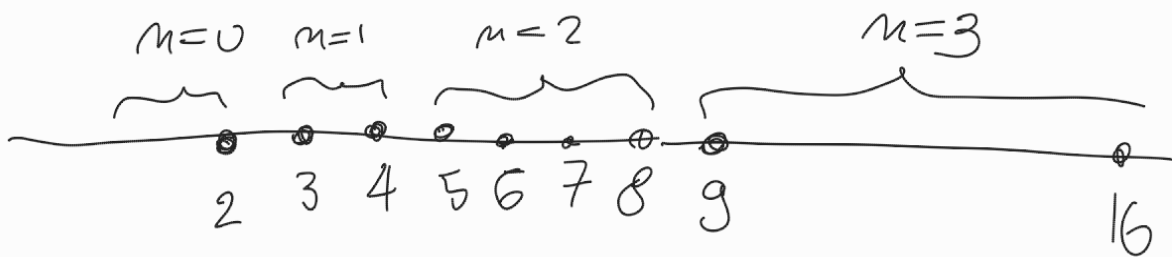
$$\|f_k\|_1 = 2^{-n}$$

$$\forall 2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$$

$$\|f_k\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$f_k(x) = 1$  per infiniti valori di  $k$

(almeno una volta per ogni  $[2^n + 1, 2^{n+1}]$ )



$f$  funzione continua

Def:  $\text{supp } f = \overline{\{x: f(x) \neq 0\}}$



$C_c(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$  per  $\|\cdot\|_1$

Prop: Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto  
 $C_c(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$

Se  $\mu$  misura Borel  
t.c.  $\mu(K) < +\infty \forall K$  compatto

vale anche  
per  $L^p_\mu(\mathbb{R}^N)$  con  $\|\cdot\|_p$

$$f \in L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow f \chi_\Omega \in L^p(\Omega)$$

viceversa data  $f \in L^p(\Omega)$   $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$   
 $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$   $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$

Dim: Data  $f \in L^p(\Omega)$  considero  $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$

def come sopra

e scelgo  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$  t.c.

$$\|\varphi - f\|_p < \varepsilon$$

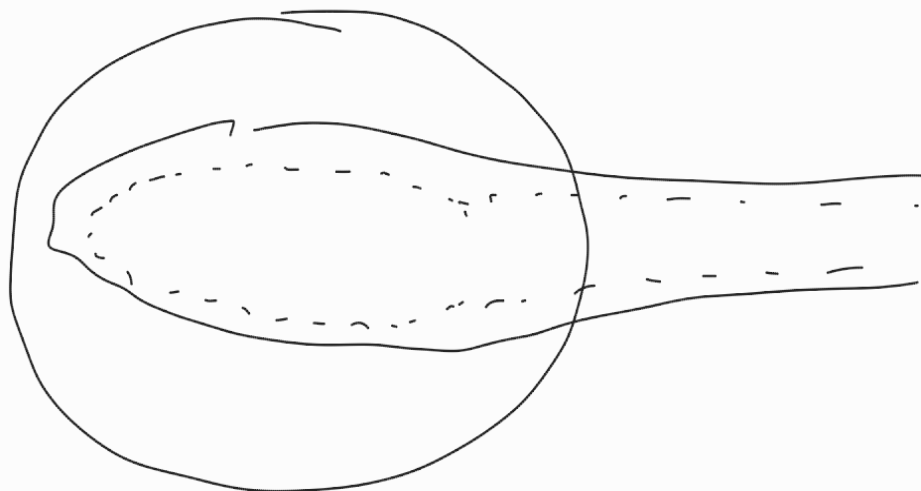
supp  $\varphi$  potrebbe non essere contenuto in  $\Omega$

$$\Omega_n \doteq \left\{ x : d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \right\} \cap B(0)$$

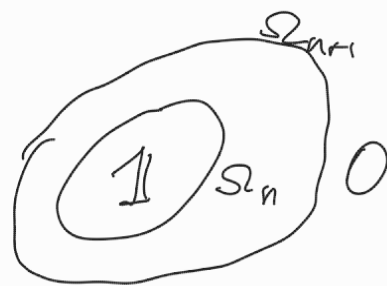
$\overline{\Omega_n}$  è compatto

$$\overline{\Omega_n} \subset \Omega$$

$$\bigcup_n \Omega_n = \Omega$$



$$g_n(x) = \frac{d(x, \Omega_{n+1}^c)}{d(x, \Omega_{n+1}^c) + d(x, \overline{\Omega_n})}$$



$$0 \leq g_n(x) \leq 1$$

$$\varphi_n = g_n(x) \varphi \rightarrow \varphi \quad \forall x \in \Omega$$

e la convergenza è anche in  $L^p$

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset \Omega \quad |\varphi_n| \leq |\varphi(x)|$$

$$\exists \bar{n}: \|\varphi - \varphi_n\|_p < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f - \varphi_n\|_p < 2\varepsilon$$

---

PROP:  $f \in L^p(\Omega) \quad p \in [1, +\infty[$   
 • se  $\varphi \in C_c(\Omega) \Rightarrow f\varphi \in L^p(\Omega)$

• se  $\int_{\Omega} \varphi f = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega)$   
 $\Rightarrow f = 0$  quasi ovunque

---

Dim:  $\varphi_n \in C_c(\Omega) \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$   
 $\varphi_n \rightarrow \text{sgn}(f) |f|^{p-1} \quad \text{in } L^q(\Omega)$   
 con conv. q.o. e dominata



$$0 = \int_{\Omega} \varphi_n f \, dx \xrightarrow{\text{conv. Dominata}} \int_{\Omega} \underbrace{f \cdot \operatorname{sgn}(f) |f|^{p-1}}_{|f|^p} \, dx$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ q.o. in } \Omega$$

Prop:  $\overline{C_c(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C_0(\mathbb{R}^N)$

↑ funzioni  $\{f \in C(\mathbb{R}^N) : \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0\}$

Dim: se  $f \notin C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\exists \varepsilon_0 \quad \exists |x_n| \rightarrow +\infty \quad \text{t.c.}$$

$$|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \exists g \in C_c(\mathbb{R}^N) \quad \|f - g\| \geq \varepsilon_0$$

viceversa se  $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\|f \cdot g_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} g_n &\in C_c(\mathbb{R}^N) \\ 0 &\leq g_n \leq 1 \\ g_n &= 1 & |x| \leq n \\ g_n &= 0 & |x| \geq n+1 \end{aligned}$$

# SERIE di FOURIER

$$I = (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}$$

$$L^2_c(I) \cong L^2_{\mathbb{R}}(I) \times L^2_{\mathbb{R}}(I)$$
$$f \leftrightarrow (u, v)$$

$$f(t) = u(t) + i v(t)$$

$$u, v \in L^2_{\mathbb{R}}(I)$$

$$\langle f, g \rangle \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

← complesso coniugato

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 + |v(t)|^2 dt$$

$$e_k(t) \doteq e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 dt = 1$$

$$\langle e_k, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \cdot e^{-iht} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{hk}$$

$$f \in L^2_c(I)$$

$$\hat{f}_k \doteq \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

$$n \in \mathbb{N}_0$$

COEFFICIENTI DI FOURIER  
di  $f$

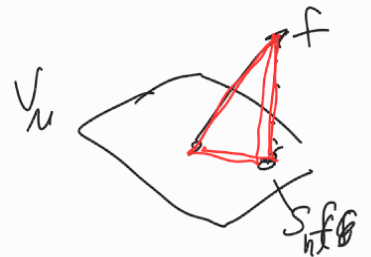
$$S_n f := \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k$$

← "Proiezione ortog  
di  $f$  su

$$V_n \doteq \text{span}\{e_k : |k| \leq n\}$$

PROP

$$(a) \|S_n f\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$$



$$(b) \langle f - S_n f, e_h \rangle = 0 \quad |h| \leq n$$

$$(c) \|f - S_n f\|^2 = \min \{\|f - p\|^2 : p \in V_n\}$$

$$(d) \|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n f\|^2$$

 Pitagora

Dim (a)

$$\|S_n f\|^2 = \langle S_n f, S_n f \rangle = \left\langle \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k, \sum_{|h| \leq n} \hat{f}_h e_h \right\rangle$$

$$= \sum_{\substack{h, k \\ |h| \leq n \\ |k| \leq n}} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_h} \langle e_k, e_h \rangle = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$$

(b)

$$\langle f - S_n f, e_h \rangle = \langle f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k, e_h \rangle$$

$$= \langle f, e_h \rangle - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \langle e_k, e_h \rangle$$

$$= \langle f, e_h \rangle - \langle f, e_h \rangle = 0$$

$|h| \leq n$

(c)  $P \in V_n$

$$\|f - P\|^2 = \underbrace{\|f - S_n f\|}_a^2 + \underbrace{\|S_n f - P\|}_b^2$$

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \|b\|^2$$

$b \in V_n \quad f - S_n f \in V_n^\perp \quad \begin{aligned} \langle a, b \rangle &= 0 \\ \langle b, a \rangle &= 0 \end{aligned}$

$$\|f - P\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f - P\|^2 \geq \|f - S_n f\|^2$$

(d) Per  $P=0$  ottengo

$$\|f\|^2 = \|f - S_n f\|^2 + \|S_n f\|^2$$

COR:  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$

DISUG di  
BESSEL

$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{f}_k| = 0$

Dim: deriva da (a)+(d)

$$\|f\|^2 \geq \|S_n f\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2 \quad \text{passando al sup}$$

$$\|f\|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$$

TEOR: (a)  $S_n f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{in } L^2_{\mathbb{C}}(I)$

(b)  $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$  UGUAGLIANZA DI PARSEVAL

(c)  $\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$

---

COR (b+c)  $L^2_{\mathbb{C}}(I) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$  è un' isometria

$$f \longmapsto (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

---

Dim Teo: il punto (b) Teo segue da (d) della proposizione.

$$\|S_n f - f\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (*)$$

FATTO:  $\bigcup_{n \geq 0} V_n$  è denso in  $C_c(I)$   
per  $\|\cdot\|_\infty$

24 nov 2022  $I = (-\pi, \pi)$

$$L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi) \cong L^2(I) \times L^2(I)$$

$$f = u + iv$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad \leftarrow \text{complexo coniugato}$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt$$

$$e_k(t) = e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k \quad \hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle$$

$\uparrow$   
Proiezione di  $f$  su  $V_n \doteq \text{span} \{e_k : |k| \leq n\}$   
 $\nwarrow \dim_{\mathbb{C}} V_n = 2n+1$

$$\|f\|^2 = \|S_n f\|^2 + \|f - S_n f\|^2$$

$$= \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2 + \|f - S_n f\|^2 \quad \leftarrow o(1) \text{ per } n \rightarrow \infty$$

TEOREMA se  $f \in L^2(I)$

$$(a) \|f - S_n f\| \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty$$

$$(b) \|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 \quad \text{ug. di Parseval}$$

$$(c) f, g \in L^2(I) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$$

FATTO:  $\bigcup_{n \geq 0} V_n$  è denso in  $C_c(I)$  per  $\|\cdot\|_\infty$

TEOR di  
STONE-WEIERSTRASS  
vers. a val in  $\mathbb{C}$

Se  $T$  sp. compatto

$C(T, \mathbb{C})$  con  $\|\cdot\|_\infty$

Se  $A \subset C(T, \mathbb{C})$  è una sottoalgebra

tale che

(I)  $A$  separa i punti  $(\forall t_1 \neq t_2 \in T \exists \alpha \in A \cdot \text{t.c.} \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2))$

(II)  $A$  contiene le costanti

(III) se  $a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A$

allora  $\text{ch}(A) = C(T, \mathbb{C})$

$$T = \mathbb{R} / \sim \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

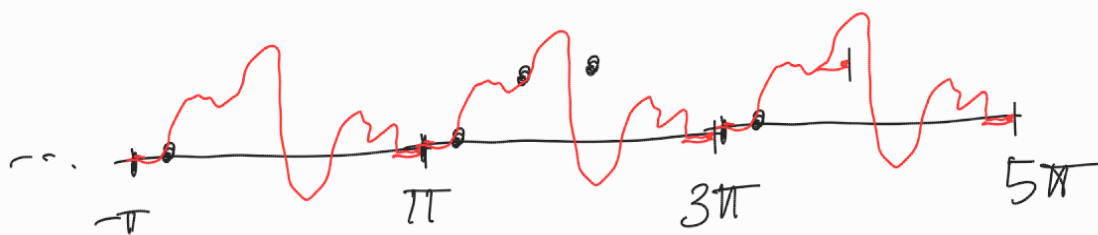
$$C(T, \mathbb{C}) \simeq C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \leftarrow \text{funzioni } 2\pi\text{-periodiche}$$

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \quad A \text{ è una sottoalgebra}$$

contiene le costanti

$e_1$  separa i punti  $e^{it_1} = e^{it_2} \Leftrightarrow t_1 \sim t_2$

SW  $\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$  è densa in  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$   
per  $\|\cdot\|$



Se  $\varphi \in C_c(\mathbb{I}[-\pi, \pi]; \mathbb{C})$

Dim: Sia  $f \in L^2(I)$   $\varepsilon > 0$  fissato

$\varphi \in C_c(I)$   $\|f - \varphi\| < \varepsilon/2$

$P \in V_{\bar{n}}$  t. c.

$$\| \varphi - P \| \leq \| \varphi - P \|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f - P\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - P\| < \varepsilon$$

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dt \leq \|g\|_{\infty}^2$$

$$\|f - S_n f\|^2 \leq \|f - P\|^2 < \varepsilon^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt$$

Se  $n \geq \bar{n} \Rightarrow P \in V_n$



$$\varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \text{ se } n > \bar{n}$$

$$\|f - S_n f\| < \varepsilon$$

~~##~~ (2)

$$(c) \quad \boxed{\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Q}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}}$$

$$\langle S_n f, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \langle e_k, g \rangle$$

$$= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$$

$$\langle e_k, g \rangle = \overline{\langle g, e_k \rangle} = \frac{\|g\|}{\hat{g}_k}$$

$$L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f \longmapsto \langle f, g \rangle \quad \text{è continua (Per Cauchy-Schwarz)}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$   
 ottengo la tesi ~~##~~

CAUCHY-SCHWARTZ per prodotti Hermitiani

H sp. di Hilbert (su  $\mathbb{C}$ )

sp. con prod. Herm.  
 Completo per def. pos  
 $\|x\|^2 \doteq \langle x, x \rangle$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\langle x, y \rangle = e^{i\theta} |\langle x, y \rangle|$$

$$z = |z| e^{i\theta}$$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$$

$$\otimes \|x + te^{i\theta}y\|^2 = \langle x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y \rangle =$$

$$t \in \mathbb{R} \text{ libero} \quad = \|x\|^2 + t(e^{i\theta}\langle y, x \rangle + \bar{e}^{i\theta}\langle x, y \rangle) + t^2\|y\|^2$$

$$0 \leq \underbrace{\|x\|^2}_C + 2t \underbrace{|\langle x, y \rangle|}_{B/2} + t^2 \underbrace{\|y\|^2}_A$$

$$\uparrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Positivo } \forall t \in \mathbb{R} \implies \frac{B^2}{4} \leq AC$$

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

---


$$\text{OSS: } L^1(I) \supset L^2(I) \supset L^\infty(I) \quad I = (-\pi, \pi)$$

$$\|g\| \leq \|g\|_\infty$$

$$f \in L^2(I) \implies \int_{-\pi}^{\pi} |f| \cdot 1 \, dt \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} 1 \right)^{1/2}$$

---


$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k \quad \text{in } L^2(I)$$

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) + f(-t))}_{f_0(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) - f(-t))}_{f_1(t)}$$

$$f_0(t) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right]$$

$$= \hat{f}_0 + \sum_{k \neq 0} \hat{f}_k \cos(kt)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right]$$

$$= \sum_{k \neq 0} i \hat{f}_k \sin(kt)$$

Se  $f(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$

$$\hat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \overline{\hat{f}_k}$$

In tal caso

$$f_0(t) = \hat{f}_0 + \sum_{k \geq 1} \left( \hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k} \right) \cos kt$$

$$f_1(t) = \sum_{k \geq 1} i \left( \hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k} \right) \sin kt$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int f(t) (\cos kt - i \sin kt) dt$$

$$(\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k}) = 2 \operatorname{Re} \hat{f}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \swarrow a_k$$

$$i(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k}) = 2i \operatorname{Im} \hat{f}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \nwarrow b_k$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

↑ serie convergente in  $L^2$

Esercizio: verificare che  $1, \cos kt, \sin kt$  ( $k \geq 1$ )  
sono un sistema ortogonale  
 $L^2_{\mathbb{R}}(I)$

Esercizio: Mostrare che  $f \in L^2_{\mathbb{R}}(0, \pi)$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin(kt) \quad \text{convergente in } L^2$$

per opportuni  $c_k \in \mathbb{R}$

Oss: Se  $f$  è dispari  $a_k = 0 \quad \forall k \geq 0$   
Se  $f$  è pari  $b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$

Esercizio: Verificare che  $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} [a_k^2 + b_k^2] \quad \left( \text{PARSEVAL in } \mathbb{R} \right)$$

PROP: Se  $(\hat{f}_k)_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$  (cioè  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k| < +\infty$ )

allora la  $\sum \hat{f}_k e_k$  è uniformemente convergente a  $f$

TEOR:  $f_k: X \rightarrow F$   $F$  Banach

$$\sup_X \|f_k\|_F \leq M_k \quad \text{con} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} M_k < +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$  converge uniformemente

Dim:  $S_m = \sum_{k=1}^m f_k(x)$  è una succ di Cauchy

$\varepsilon > 0$  N.t.c.  $\sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$ ;

$$\|S_m(x) - S_n(x)\|_F = \left\| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k(x)\|_F$$

$$m > n \geq N$$

$$\leq \sum_{k=N}^{+\infty} M_k < \varepsilon$$

$\nearrow$   $\varepsilon$  &  $N$  grande

$S_n(x)$  converge ( $F$  è completo)

$$\|S_n(x) - S(x)\|_F \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_F \leq \sum_{n+1}^{+\infty} M_k$$

————— 0 —————

0

Dirichlet (prop)

$$|f_k e_k(t)| = |f_k| \quad \text{quindi } \sum |f_k| \text{ converge}$$

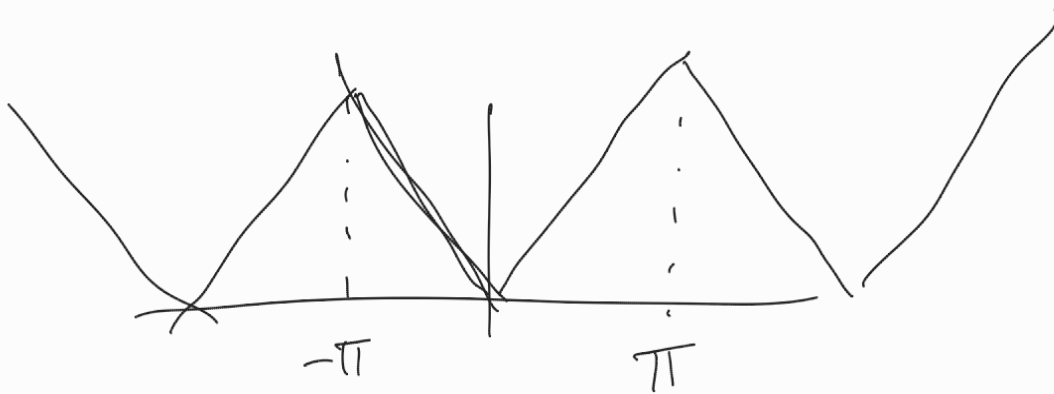
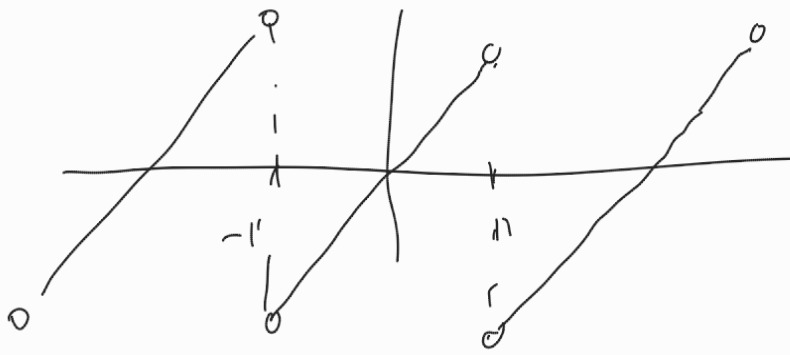
$\sum f_k e_k(t)$  converge uniformemente  
e converge proprio ad  $f$

Es: scrivere lo sviluppo in serie  
delle funzioni

$$f(t) = \pi \quad \text{su } [-\pi, \pi]$$

$$f(t) = |t|$$

e dire se la serie converge  
uniformemente



$f_n$  di Cauchy per  $\|\cdot\|_\infty$

$$\forall K \in \mathbb{N} \exists N : n, m \geq N$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{K}$$

$$\forall x \in X \setminus E_{n,m,K}$$

diminuisce  
mille



$$X \setminus \underbrace{\bigcup_{n,m,K} E_{n,m,K}}_{m(E)=0}$$

$$\forall x \notin E$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{è di Cauchy} \quad \forall x \in X \setminus E$$

01 dic 2022

$$f(t) = t \quad \text{su } (-\pi, \pi)$$

$$g(t) = |t|$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

$(k \geq 1)$

$$0 \leq k.$$



$$f \text{ dispari} \Rightarrow a_k^{(f)} = 0$$

$$f \text{ pari} \Rightarrow b_k^{(f)} = 0$$

$$f(t) = t$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{t}_{\text{derivo}} \underbrace{\sin(kt)}_{\text{integro}} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ t \frac{(-\cos kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt$$

$$= \frac{2}{\pi k} (-\cos k\pi) + 0$$

$$= \frac{2}{\pi k} (-1)^{k+1}$$



$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1} \sin(kt)$$

↑ in  $L^2$

$$\left( (-1)^k \frac{2}{k\pi} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

$$\notin \ell^1(\mathbb{N})$$

—————○—————

$$g(t) = |t|$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \pi^2 = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left( \left[ t \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1)$$

$$a_0 = \pi$$

$$a_k \quad (k \geq 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{\cos(kt)}{k^2}$$

$a_k \in \ell^1(\mathbb{N}) \Rightarrow$  la serie converge uniformemente

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ disp}} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k \text{ disp}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Divergence :  $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$$S = \sum_{k \text{ disp}} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \text{ pair}} \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$


---

$$f \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$$

$$S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k \longrightarrow f \quad \text{in } L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$$



funz  $2\pi$  periodiche  
continue

$$S_n f \longrightarrow \tilde{f} \quad \text{in } L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$$

con  $\tilde{f}$  funzione  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

$2\pi$  periodica

che coincide con  $f$  su  $(-\pi, \pi)$

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2\pi} < k + \frac{1}{2}$$

Esercizio: Mostrare che

$$\int_a^{a+2\pi} \tilde{f}(t) dt \quad \text{non dipende da } a \in \mathbb{R}$$

È naturale pensare  $f$  come funzione di  $L^2(\pi)$

$$\pi = \mathbb{R}/\mathbb{N}$$

$$x \sim y \iff x - y = 2k\pi \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio

$$\text{se } f \in L^2_c(a, a+T)$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(s) \overline{g(s)} ds$$

$$\tilde{e}_k(t) = e^{i k \frac{2\pi}{T} t}$$

sono un sistema ortogonale completo

$$(\text{generano } L^2_c(a, a+T))$$

example:  $a=0$   $T=1$

$$\tilde{\varphi}_k(t) = e^{i 2\pi k t}$$


---

Prop: Se  $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Allora  $\hat{f}_k \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$  e

$$\left( \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^{1/2} \|f'\|_2$$


---

Dim:  $\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right)$$

→ 0

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right) = \frac{1}{ik} (\hat{f}')_k$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k| = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|k|} |(\hat{f}')_k| \leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \right) \left( \sum_{k \neq 0} |(\hat{f}')_k|^2 \right)^{1/2}$$

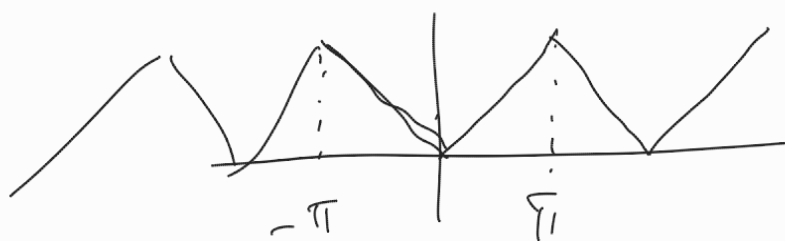
↑ prodotto scalare in  $\ell^2(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 dt \right)$$

↖ Per identità  
Parseval  
applicata a  $f'$

Esercizio:

Lo stesso argomento funziona  
anche se  $f$  ha un numero finito  
di punti angolosi



(P.e.s.)

Prop: Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  allora  
definisco  $f_h(x) \doteq f(x-h)$   
 $f_h \in L^1(\mathbb{R})$  e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_1 = 0$$

Es: dimostrazione  
in  $L^p$

Dim: Argomento di densità

$P \neq 0$

Sia  $\varepsilon > 0$

scelgo  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) : \|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$

$$\text{supp } \varphi \subset \overline{B_R(0)}$$

$$M = |\overline{B_{RH}(0)}|$$

Heine Cantor

$$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \varphi \in \bigcup C.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$\text{se } |h| < \delta \quad |\varphi(x) - \varphi_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$|h| < 1 \quad \|\varphi - \varphi_h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3M}$$

$$\|\varphi - \varphi_h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{se } |h| < \delta$$

$$\|f - f_h\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - f_h\|_1$$

$$\wedge \quad \wedge \quad \wedge$$

$$\frac{\varepsilon}{3} \quad \frac{\varepsilon}{3} \quad \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|f - f_h\|_1 < \varepsilon$$

$$\forall |h| < \delta$$

# LEMMA DI RIEMANN

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-h) e^{i\lambda(t-h)} dt$$

$h = \frac{\pi}{\lambda}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt + \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dt \right]$$

$$e^{i\lambda t - i\pi} = -e^{i\lambda t}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dt$$

$\downarrow f_{\pi/\lambda}(t)$



LEMMA

Nuclci di  
Dirichlet

$$D_n(t) \doteq \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}$$

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$$

( $t \neq 0$ )

$$\frac{1}{2} \|f - f_{\pi/n}\|_1$$

$\downarrow$   
0

$\lambda \rightarrow +\infty$

Dim: [Per esercizio,

•  $e^{it/2} D_n(t)$  è una somma geometrica

• moltiplicare  $e^{-it/2}$  sopra e sotto  
la formula che si trova

oss:  $D_n(t)$  è pari  $D_n(0) = n+1$

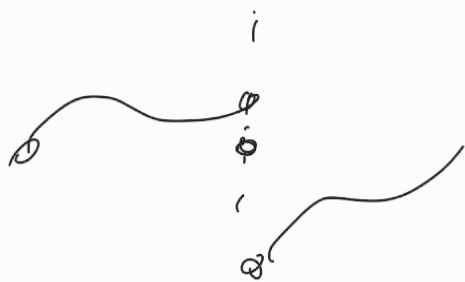
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$$

$$S_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k = \sum_{|k| \leq n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(t-s)} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_n(t-s) ds$$

Def: Dico che  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -periodica  
 è regolare a tratti se su ogni  
 periodo ha un numero finito di  
 discontinuità e fuori è  $C^1$   
 con derivata limitata



p.e.s.  $f(t) = t$   
 estesa per periodicità  
 ha questa proprietà

Teo: Se  $f$  è regolare a tratti

$$S_n f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)]$$

$$f(x^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$$

Dim:

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

$$t = x+s$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(s) ds$$

*D è pari*

integrande è  $2\pi$ -periodico

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) D_n(s) ds}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rightarrow f(x^-)}} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rightarrow f(x^+)}} \right]$$

$$f(x_0^+) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x_0 + s) D_n(s) ds =$$

$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(s) ds = 1$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x_0^+) D_n(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x_0 + s) D_n(s) ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x_0^+) - f(x_0 + s)) D_n(s) ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{f(x_0^+) - f(x_0 + s)}{s} \cdot \frac{s}{\sin(\frac{s}{2})} \sin((n + \frac{1}{2})s) \right) ds$$

$\mathcal{F}_x(s)$  è in  $L^1$   $\text{se } |f'| \geq \left| \frac{f(x^+) - f(x+s)}{s} \right|$

$$= \frac{1}{\pi} \int \mathcal{F}_x(s) \cdot \sin((n + \frac{1}{2})s) ds$$

$n \rightarrow \infty \rightarrow 0$  per Riemann-Lebesgue

15 dic 2022

$$\varphi \in L^1([0, +\infty))$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} dt \quad (1)$$

dove

$$\omega_n \doteq |B_1^{(n)}(0)| = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} \quad (2)$$

$$\text{con } \Gamma(x) \doteq \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

misura di Lebesgue  
della palla  $n$ -dimensionale

è la  $\Gamma$  di  
Eulero

Dim. n: Chiamo  $\omega_n \doteq |B_1^{(n)}(0)|$

$$|B_r^{(n)}(0)| = r^n \omega_n \quad (\text{cambio di variabile})$$

Dimostro (1) per  $\varphi = \chi_{[a,b]}$  ~~0 < a < b~~

per  $\varphi$  continua a supp comp.

per  $\varphi \in L^1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|) dx = \int_{a \leq |x| \leq b} dx = |B_b^{(n)}(0) \setminus B_a^{(n)}(0)|$$

$$= (b^n - a^n) \omega_n$$

$$= \omega_n \int_a^b n t^{n-1} dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|) dx = \omega_n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(t) n t^{n-1} dt$$

————— 0 —————

$$(*) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \pi^{n/2}$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} A x \cdot x} dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \right)$$

$$A = 2 \text{Id}$$

$$\sqrt{\det A} = 2^{n/2}$$

$$(*) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} n \omega_n t^{n-2} \overbrace{2t dt}^{ds} \quad s = t^2$$

$$= \frac{n}{2} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} (\sqrt{s})^{n-2} ds$$

$$= \frac{n}{2} \omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1} ds$$

$$\pi^{n/2} = \frac{n}{2} \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

P.er:  $\boxed{n=2}$   $\omega_2 = \frac{\pi}{\Gamma(1)} = \pi$

$$x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\boxed{n=1}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi^{1/2}}{1/2 \Gamma(1/2)} = 2 \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$$

$$\boxed{n=3}$$

$$\omega_3 = \frac{\pi^{3/2}}{3/2 \Gamma(3/2)} = \frac{4}{3} \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Oss: la quantità

$$\boxed{n \omega_n t^{n-1}}$$

rappresenta

la misura (n-1)-dim della  $\partial B_t^{(n)}(0)$

# Prodotto di CONVOLUZIONE (in $\mathbb{R}^N$ )

$$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

$$g \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy$$

Teo:  $f * g(x)$  è ben definita per q.o.  $x \in \mathbb{R}^N$

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad e$$

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Dim:  $\boxed{p=1}$

$$\Phi: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Phi(x, y) = f(x-y) g(y)$$

oss:  $\Phi$  è misurabile

$$y \in \mathbb{R}^N$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x, y)| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx |g(y)| \\ &= \|f\|_1 |g(y)| \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |\Phi(x, y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_1 |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Fubini-Tonelli

$$\Rightarrow \Phi \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$$

$$\uparrow$$
$$f(x-y) g(y)$$



Pertanto per q.o.  $x \in \mathbb{R}^N$  è ben definita  
 $x \mapsto \int f(x-y) g(y) dy \in L'(\mathbb{R}^N, dx)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f * g|(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy dx$$

$\Delta \leftarrow \text{F.T.}$

$$\|f\|_1 \|g\|_1$$

Caso  $p > 1$

$$h(x) = (|f| * |g|^p)(x)$$

$$h \in L' \quad \|h\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p^p$$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|f(x-y) g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|$$

$\underbrace{\quad}_{L_y^q} \quad \underbrace{\quad}_{L_y^p}$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) g(y)| dy$$

$$\leq \|f\|_1^{1/q} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$(f * g)(x) \leq \|f\|_1^{1/q} (h(x))^{1/p}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f * g|^p(x) dx \leq \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx \leq$$

$$\leq \|f\|_1^{p/q} \|f\|_1 \|g\|_p^p$$

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1^{1/q} \|f\|_1^{1/p} \|g\|_p$$

$$\leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Esercizio  
 $f * g = g * f$

Prop:  $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$   
 $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\Rightarrow f * g \in C(\mathbb{R}^N)$$

Dim:  $f \in C_c(\mathbb{R}^N) \Rightarrow f \in U.C.$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$|f * g(x) - f * g(x')| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x'-y)] g(y) dy \right|$$

se  $|x - x'| < \delta$   
 $|f(x-y) - f(x'-y)| < \varepsilon$

se  $|x - x'| < \delta$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x'-y)| |g(y)| dy$$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

$$\leq \varepsilon \|g\|_1$$

Es: Mostrare che la stessa conclusione vale  
 se  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Prop: Se  $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$   
 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Allora  $f * g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  (1)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \quad (2)$$

Dim: oss 1  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$  per quanto visto prima

oss 2  $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g \in C(\mathbb{R}^n)$

Per il teorema del differenziale totale  
 basta verificare (2)

$$\circledast = \left| (f \ast g)(x + h e_i) - (f \ast g)(x) - \left( \frac{\partial f \ast g}{\partial x_i} \right)(x) h \right| = o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} \left[ \underbrace{f(x + h e_i - y) - f(x - y)}_{\substack{\text{modulo di} \\ \text{continuità di } f}} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) h \right] g(y) dy \right| = \circledast$$

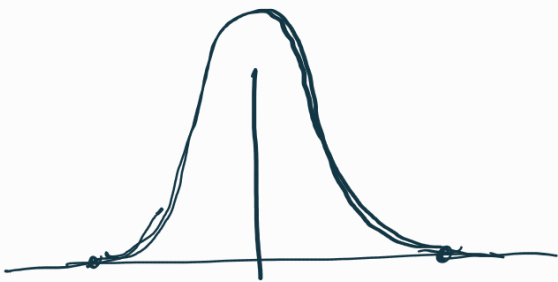
$$\boxed{f(x + h e_i - y) - f(x - y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t h e_i - y) \cdot h dt}$$

$$\circledast \leq |h| \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + t h e_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| dt g(y) dy$$

$\omega$  modulo di continuità di  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

se  $h$  è piccolo  
è piccolo

$$\circledast \leq |h| \omega(|h|) \|g\|_1 = o(h)$$



$$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$f \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = 1$$

$$\text{supp } f \subseteq B_1(0)$$

$$p_n(x) \doteq n^{\frac{N}{2}} p(nx)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} p_n(x) dx = 1$$

$$\boxed{\text{supp } p_n \subseteq B_{1/n}(0)}$$

se  $f \in L^1$

considero

$$p_n * f \in L^1$$

$$p_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$$

$$p_n * f \rightarrow f \quad \text{in } L^1$$

————— ◯ ———

Dim:  $p_n * f \in C^\infty$  si dimostra applicando  
ripetutamente la prop precedente

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} (p_n * f) = \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} p_n \right) * f$$

Per verificare la convergenza

$$\int_{\mathbb{R}^N} |p_n * f - f| dx \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int p_n(x-y) f(y) dy - f(x) \right| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} p_n(x-y) |f(y) - f(x)| dy dx$$

$$x-y=w \quad = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} p_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} p_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx$$

$$= \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} p_n(w) \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-w) - f(x)| dx \right) dw$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists n_0: \|f - f_w\|_1 < \varepsilon \quad \forall |w| < \frac{1}{n_0}}$$

$$\|f - f_w\|_1 \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f * p_n(x) - f(x)| dx < \int_{|w| \leq \frac{1}{n}} p_n(w) \cdot \varepsilon dw = \varepsilon$$

se  $n \geq n_0$

continuità dell'  
integrale rispetto alle  
traslazioni

Calcolare l'area

PER CASA

di  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y \leq 3x \\ 1 \leq xy \leq 2 \end{array} \right\}$$

14 die 2022

$$Q = [0,1]^N \subseteq \mathbb{R}^N$$

$$L^2_c(Q)$$

$$\langle f, g \rangle = \int_Q f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$e_k(x) \doteq e^{2\pi i k \cdot x}$$

$$k \cdot x = \sum_{i=1}^N k_i x_i$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

⊙  $e_k$  è un sistema ortonormale

$$\langle e_k, e_h \rangle = \int_Q e^{2\pi i k \cdot x} e^{-2\pi i h \cdot x} dx$$

$$= \int_Q e^{2\pi i (k-h) \cdot x} dx$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i (k_1-h_1)x_1} dx_1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i (k_N-h_N)x_N} dx_N$$

$$= \delta_{k_1-h_1} \cdots \delta_{k_N-h_N} = \delta_{hk}$$

$$f \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Q}) \quad k \in \mathbb{Z}^N$$

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle$$

$$S_n f = \sum_{|K| \leq n} \hat{f}_k e_k$$

$$|K| = \sum_{i=1}^N k_i$$

$$\textcircled{R} \quad S_n f \rightarrow f \quad \text{in } L^2$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\hat{f}_k|^2$$

(Per ottenere il risultato  
bisogna verificare che  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}^N}$  è completo)

---

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2 + xy + y^2)} dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Caso particolare di

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} A x \cdot x} dx$$

A matrice  
simmetrica  
def. pos



Nel caso specifico  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

---

$$\underline{x = My}$$

$$Ax \cdot x = (AMy) \cdot (My) = ({}^t M A M y) \cdot y$$

Posso prendere come matrice  $M$  una matrice ortogonale che diagonalizza  $A$

$$M^{-1} A M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} Ax \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2} Dy \cdot y} \overset{\substack{\uparrow \\ \textcircled{e^1}}}{| \det M |} dy$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy \\ &\quad \text{Fubini Tonelli} \quad \downarrow \\ &= \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy_i = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \end{aligned}$$

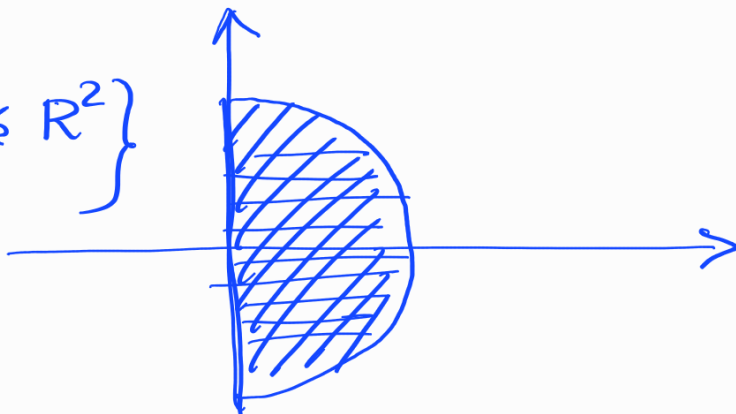
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda}{2} t^2} dt \quad \uparrow \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\lambda} t \\ ds &= \sqrt{\lambda} dt \end{aligned}$$

Nel caso  
considerato allo  
inizio questo da  
 $2\pi/\sqrt{3}$

Calcolare il baricentro di un  
semidisco

$$D^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$



$$\bar{x}_{D^+} = \frac{\int_{D^+} x \, dx \, dy}{\int_{D^+} dx \, dy} \quad \leftarrow \quad \frac{\pi R^2}{2}$$

opzioni  $\nearrow$  Fubini  
Tonelli  
 $\searrow$  Cambio di  
variabili

$$\int_{D^+} x \, dx \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^R \rho \cos \theta \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

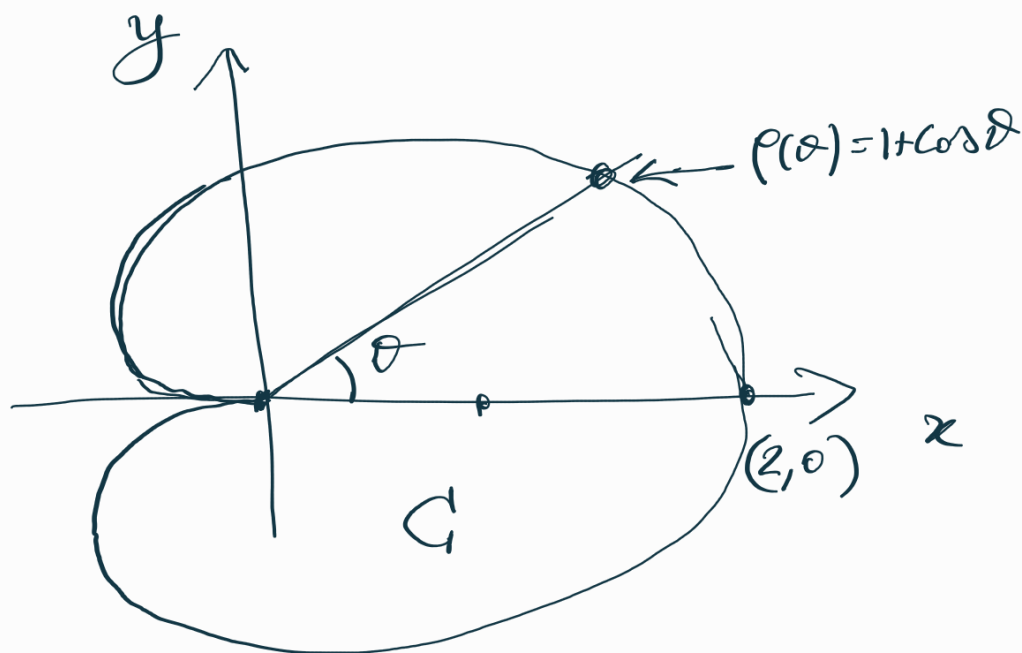
$\nwarrow$  Jacobiano  
delle coord  
polari

$$= \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{2 R^3}{3}$$

$$\bar{x}_{D^+} = \frac{\frac{2 R^3}{3}}{\pi R^2 / 2} = \frac{4}{3\pi} R$$

④ Determinare l'area della cardioidale

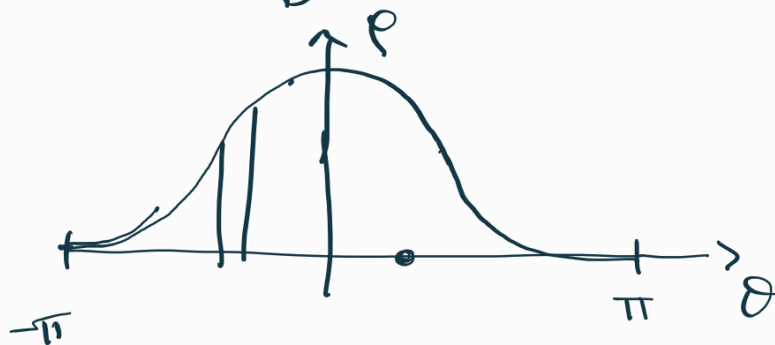
$$\rho \leq 1 + \cos \theta$$



$$C = \bar{\Phi}(D)$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} ; \rho \leq 1 + \cos \theta \right\}$$

$$\text{Area}(C) = \iint_C dx dy = \iint_D J_{\Phi} d\rho d\theta = \iint_D \rho d\rho d\theta = (*)$$

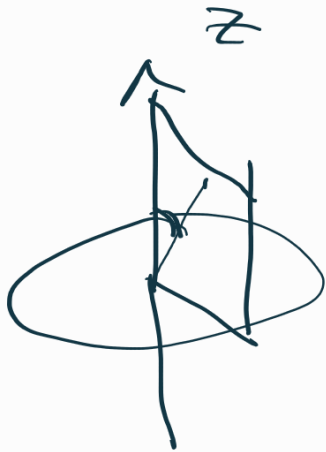


$$(*) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{1+\cos \theta} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(2\pi)}_{\uparrow} + \underbrace{\frac{1}{2}\pi}_{\leftarrow \text{da } \cos^2} = \frac{3}{2}\pi$$


---

Calcolare il determinante del cambio di coordinate "coordinate sferiche" osservando che si tratta di una composizione di due cambi di coordinate "cilindriche"



$(\rho, \theta)$  in  $x, y$

$(\rho, z)$  prendo coord. polari

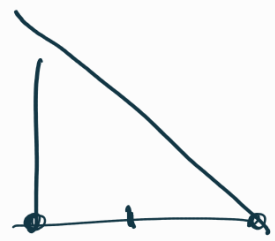
---



$$\iint_D \frac{1}{1+x+y} dx dy = (*)$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$(*) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x+y} dy =$$



$$= \int_0^1 \left[ \log(1+x+y) \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 [\log 2 - \log(1+x)] dx = \log 2 - \left[ x \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$$

$$= \cancel{\log 2} - \cancel{\log 2} + \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

$$= 1 - \log 2$$

Es: Calcolare

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

con  $D = \{ x \geq 0 ; x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \}$

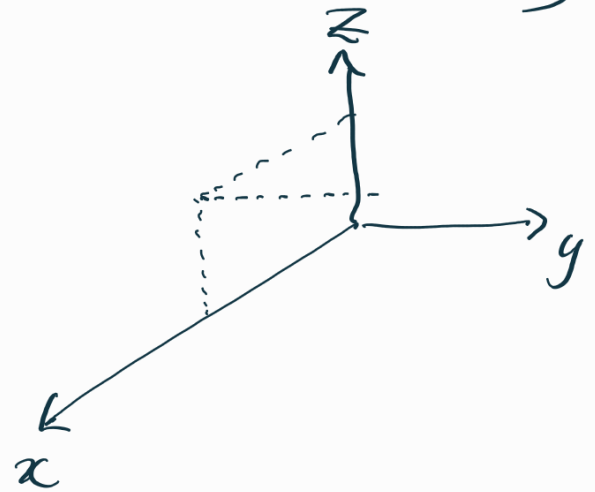
$$\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz$$

$$E = \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \quad 0 \leq y \leq 2 - x^2 - z^2 \right\}$$

findo  $(x, z)$

$$\iint_D \left( \int_0^{2-x^2-z^2} xz \, dy \right) dx \, dz$$

$$D = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + z^2 \leq 2 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$$



$$\iint_D xz (2 - x^2 - z^2) \, dx \, dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cos \theta \sin \theta (2 - \rho^2) \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$\text{F.T.} = \left( \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \, d\theta \right) \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^3 - \rho^5) \, d\rho$$

$$= \left[ -\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\pi/2} \left[ \frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{8}{6} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Es:  $I = [a, b]$

$u \in C^1(I)$

$u(a) = u(b) = 0$

(i)  $\exists C > 0$  t.c.  $\int_a^b |u(t)|^2 dt \leq C^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt$

(ii) Mostrare che  $C = \frac{(b-a)}{\pi}$  è la miglior scelta

S.P.g posso supporre  $a=0$  (traslat.)  
 " "  $b=\pi$  (riscaleam lineare)  
 $(C=1)$

~~Estendendo~~ Estendendo  $u$  a  $[-\pi, \pi]$  ottengo  
 in maniera dispari ( $\tilde{u}$ )

ho che  $\tilde{u} \in C^1$  e  $\tilde{u}$  è estendibile  
 a una funzione  $C^1$  e  $2\pi$ -periodica  
 su tutto  $\mathbb{R}$

$\tilde{u} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kt)$

$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{u}(t) \sin(kt) dt$   
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t) \sin(kt) dt$

$\tilde{u}' = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k \cos(kt)$

← converge in  $L^2$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 < +\infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt = 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \leq 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 b_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt$$

La disug. vale sempre ed è  
ottimale se  $b_k = 0 \quad \forall k \neq 1$



7 mar 2023

FORME DIFFERENZIALI  
(CHIUSE & ESATTE)

$$\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

$$\omega \in C^0 \circ C^1$$

$$x \mapsto \sum_i A_i(x) dx_i$$

FORMA CHIUSA

$$\omega = \sum A_i(x) dx_i$$

$$\partial_i A_j = \partial_j A_i \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

FORMA ESATTA

$$\exists U: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \partial_i U = A_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$dU = \omega$$

Se  $U$  è una forma di classe  $C^1$  allora

$$U \text{ esatta} \Rightarrow U \text{ chiusa} \quad (\text{th di Schwartz})$$

$\Leftarrow$  non sempre vera

Dire che le seguenti forme differenziali

sono chiuse, esatte (e nel caso determ.  $U$ )

$$(1) \quad \omega(x, y) = \overbrace{-y}^{A_1} dx + \overbrace{\sin(xy)}^{A_2} dy$$

$$(2) \quad \omega(x, y) = \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y dx - x dy)$$

$$(3) \quad \omega(x, y, z) = (y-z) dx + (x+z+1) dy + (y-x+1) dz$$

$$A_1(x, y) = -y$$

$$A_2(x, y) = \sin(xy)$$

$$\partial_y A_1 = \partial_x A_2 \quad \text{cond per la chiusura}$$

$$-1 = \cos(xy) y$$

NO

(1) non è chiusa

(2) è chiusa?

$$\begin{cases} A(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \\ B(x, y) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \end{cases}$$

$$\partial_y A = \partial_x B$$

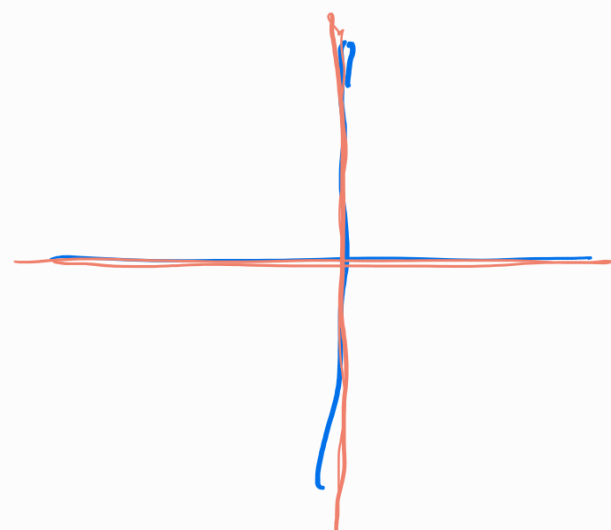
$$\partial_y A = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$\partial_x B = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$\Rightarrow \omega$  è chiusa

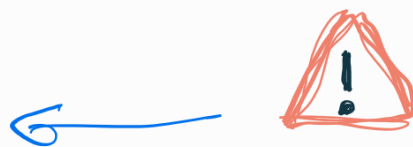
$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\}$$

$\omega$  è anche esatto



$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$



$$U = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \text{ è un potenziale}$$

---


$$(3) \quad \omega(x, y, z) = \underbrace{(y-z)}_{A_1} dx + \underbrace{(x+z+1)}_{A_2} dy + \underbrace{(y-x+1)}_{A_3} dz$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} \stackrel{1=2}{=} \frac{\partial A_2}{\partial x} \quad (\checkmark)$$

$$\partial_j A_i = \partial_i A_j$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} \stackrel{1=3}{=} \frac{\partial A_3}{\partial x} \quad (\checkmark)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} \stackrel{1=4}{=} \frac{\partial A_3}{\partial y} \quad (\checkmark)$$

$\vec{e}$  chiusa  
 $\vec{e}$  esatta

$$U = \int A_1(x, y, z) dx = x(y-z) + \psi(y, z)$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} = A_1} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = A_2$$

$$\cancel{x} + \partial_y \psi(y, z) = \cancel{x} + z + 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = A_3$$

$$\cancel{-x} + \partial_z \psi(y, z) = y \cancel{(-x)} + 1$$

$$\partial_y \psi = z + 1$$

$$\omega' = (z+1)dy + (y+1)dz$$

$$\partial_z \psi = y + 1$$

$$\psi(y, z) = zy + y + z$$

$$\omega = \sum A_i(\underline{x}) dx_i \quad \text{con } A_i(\underline{x}) = a(|\underline{x}|) x_i$$

Allora  $\omega$  è esatto su  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\text{e } \omega = dU \quad \text{con } U(\underline{x}) = \Phi(|\underline{x}|)$$

$$\text{con } \Phi'(t) = t a(t)$$

Dim: Chiamo  $\Phi$  la primitiva di  $t \mapsto t a(t)$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\underline{x}) = \Phi'(|\underline{x}|) \frac{x_i}{|\underline{x}|} = \cancel{|\underline{x}|} a(\cancel{|\underline{x}|}) \frac{x_i}{\cancel{|\underline{x}|}} = A_i(\underline{x})$$

— o —

Esempio

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

è esatto

$$a(t) = \frac{1}{t^2} \quad t a(t) = \frac{1}{t} \quad \Phi(t) = \log|t|$$

$$U(x,y) = \log(x^2 + y^2)$$

↑ oss: È ARMONICA, cioè  $\Delta U = 0$

PROP:  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $u \in C^2(\Omega)$

$$\Delta u \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

$\Omega$  semplicemente connesso

Allora  $\exists v: \nabla u \cdot \nabla v = 0$   
 $|\nabla u| = |\nabla v|$   
 $\Delta v = 0$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} \quad \nabla v = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$\omega(x, y) = -\partial_y u \, dx + \partial_x u \, dy$  è chiusa?

$$-\partial_y^2 u = \partial_x^2 u \iff \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$$

Quindi dato che  $\Omega$  è semplicemente

connesso  $\exists v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: dv = \omega$

e quindi  $\nabla u \cdot \nabla v = 0$  su  $\Omega$   
Tali  $u, v$  si chiamano armoniche coniugate

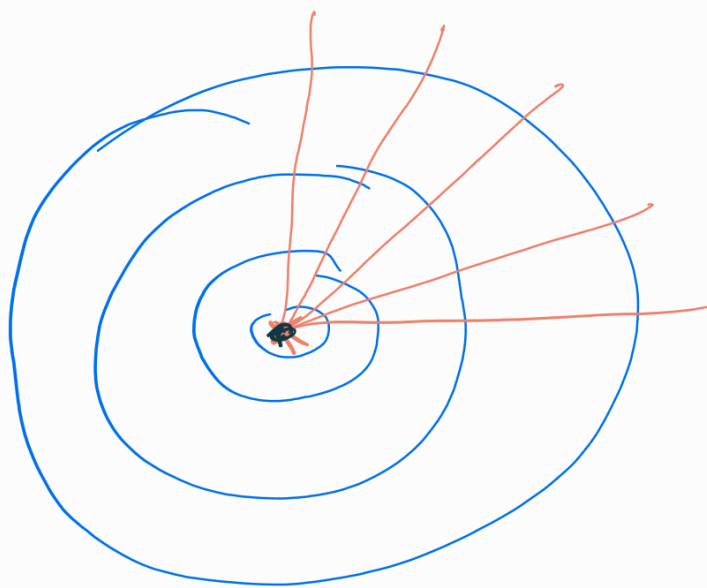
E se  $\Omega$  non è semplicemente connesso?

$$u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

$$\partial_x u = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\partial_y u = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\omega_0 = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$



Esercizio: Scrivere una primitiva di  $\omega_0$  definita su  $\{x > 0\}$

$$\int_{\gamma} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} \quad \omega \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5 t) \cos 2t \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3 t) \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\omega = A dx + B dy \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [a, b]$$

$$\int_{\gamma} \omega \doteq \int_a^b [A(\gamma(t)) \dot{x}(t) + B(\gamma(t)) \dot{y}(t)] dt$$

$$\omega = \underbrace{\left[ \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy \right]}_{\omega_1} + \underbrace{\left[ \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right]}_{\omega_2}$$

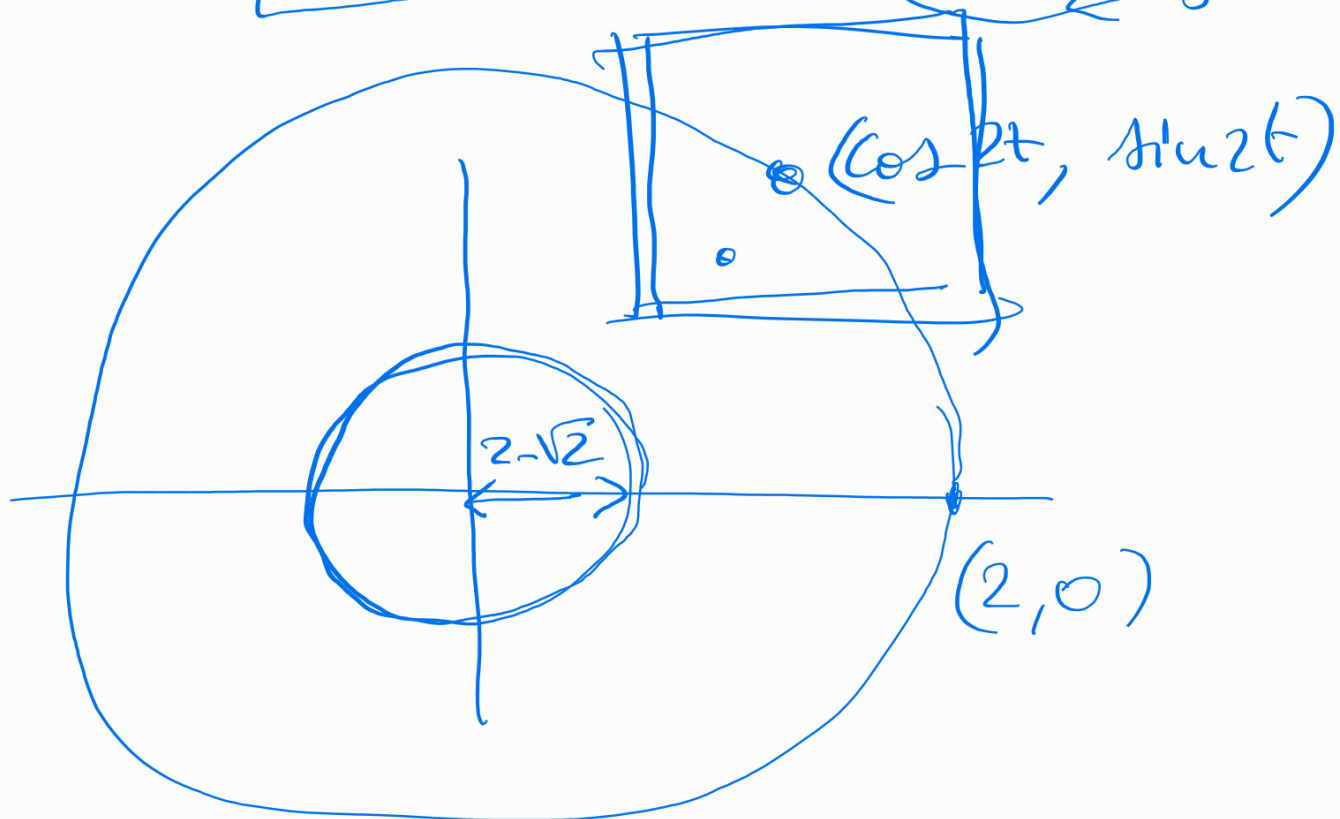
$$\int_{\gamma} \omega = \cancel{\int_{\gamma} \omega_1} + \int_{\gamma} \omega_2$$

integrale di  
forma esatta  
su curva chiusa

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos^5 t) \cos 2t \\ (2 + \frac{1}{2} \sin^3 t) \sin 2t \end{pmatrix}$$

$x(t)$

$y(t)$



$$|x(t) - 2 \cos(2t)| \leq 1$$

$$|y(t) - 2 \sin(2t)| \leq 1$$

$\int_{\delta_1} \omega_2$  non dipende da  ~~$\lambda$~~

$$\int_{\delta_1} \omega_2 = \int_{\delta_0} \omega_2 = 4\pi$$

$$\delta_0(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$



8 marzo 2023

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

$\omega$  chiusa

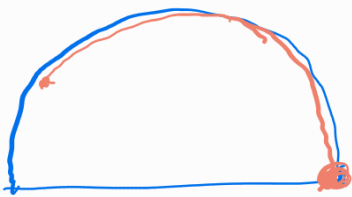
$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Vero se l'omotopia è a  
estremi fissati (\*)

Oss: la cond è necessaria

$$\omega = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$$H(\lambda, t) = \begin{matrix} \cos(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) \end{matrix}$$



$$\begin{matrix} t \in [0, \pi] \\ \lambda \in [0, 1] \end{matrix}$$

$$\gamma_1(t) = H(1, t)$$

$$\gamma_0(t) = H(0, t)$$

$$\int_{\gamma_0} \omega = 0$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = \pi$$

Oss: lo stesso risultato vale se  
alla condizione "omotopia a estremi  
fissati"

"omotopia tra curve chiuse"

$$H(\lambda, t) : [0, 1] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

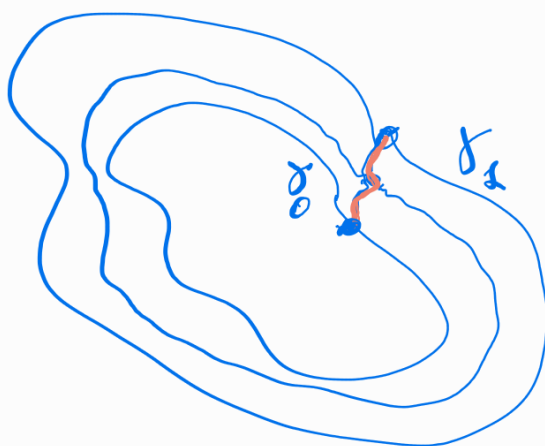
$$\textcircled{+ \lambda} \left. \begin{array}{l} H(\lambda, a) = P_A \\ H(\lambda, b) = P_B \end{array} \right\} \leftarrow \text{estremi fissati}$$

$$\boxed{H(\lambda, a) = H(\lambda, b)} \\ \forall \lambda \in [0, 1]$$

omotopia tra curve  
chiuse

$$\gamma_i = H(i, \cdot)$$

$$\delta(\lambda) \doteq H(\lambda, 0) (= H(\lambda, 1))$$



la curva

$$\gamma_0 \sim \delta^{-1} \gamma_1 \delta$$

con un'omotopia a estremi fissati

Verificare i dettagli per esercizio

— o —

Prop: Sia  $\omega$  una forma chiusa  
su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (di classe almeno  $C^1$ )

Allora  $\exists c \in \mathbb{R} \quad \exists U \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$

tale che  $\omega = dU + c\omega_0$

dove  $\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$$

---

Dim: Fisso  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  Gruppo di coomologia  
 $t \in [0, 2\pi]$

$$c \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega$$

$$\omega_1 = \omega - c\omega_0$$

$\omega_1$  è chiusa (perché differenza di forme chiuse)

$\omega_1$  è esatta in quanto

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega - c \int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi c - c 2\pi = 0$$

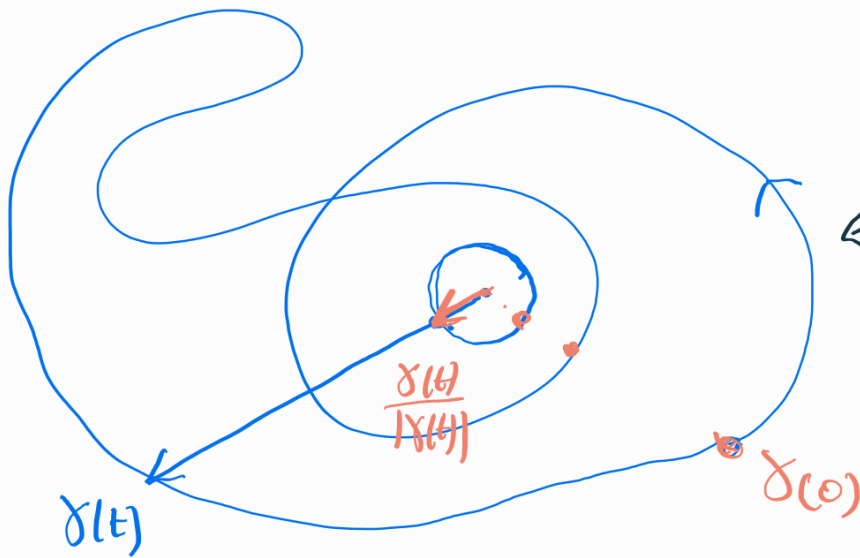
scelgo  $U$  t.c.  $dU = \omega_1$

INDICE DI AVVOLGIMENTO di una  
Curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$$

Oss1: se  $\gamma$  è una curva chiusa in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   
 $\Rightarrow \text{ind}(\gamma) \in \mathbb{Z}$   
conta quante volte giro attorno a 0 in senso antiorario

Dim: Considero un'omotopia con data periodica  
al bordo tra  $\gamma(t)$   $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$

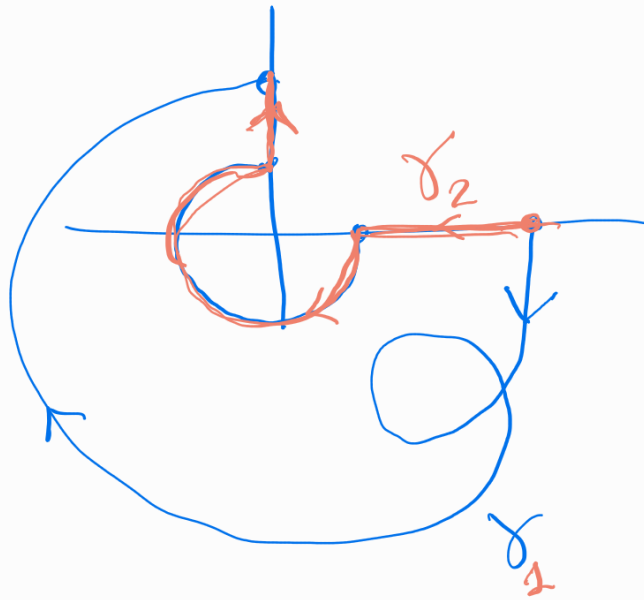


← Esempio:  
in questo caso  
 $\int_{\gamma} \omega_0 = 4\pi$

$$H(\lambda, t) = \lambda \gamma(t) + (1-\lambda) \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

$\lambda \in [0, 1]$

Oss2: se  $\gamma_0$  è una curva qualsiasi  
e  $\gamma_1 \sim \gamma_0$  a estremi fissati  
allora  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$



Quanto vale  $\int_{\gamma} \omega_0 = -\frac{3}{2}\pi$

$\gamma_1 \sim \gamma_2$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

e l'integrale di  $\omega_0$  sui pezzi rettilinei di  $\gamma_2$  è nullo

$$\begin{aligned}
 t \mapsto \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix} \quad , \quad \omega_0(\sigma(t)) \sigma'(t) &= \\
 &= \frac{bt(a) - at(b)}{(a^2 t^2 + b^2 t^2)} = 0
 \end{aligned}$$


---

## Esercizio

$$\omega(x, y) = \frac{y dx}{x^2 + y^2} - \frac{x + x^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dy$$

• Dire se  $\omega$  è chiusa o esatta

• Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$  dove

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad -2 \leq t \leq 2$$

$$\omega = \omega_0 - x^2 dy$$

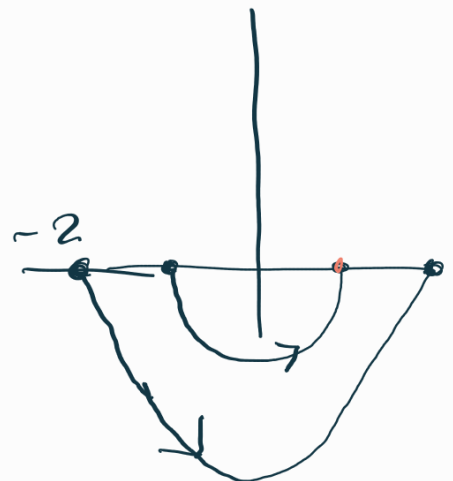
$$\omega_0 = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

$\omega$  non è chiusa perché  $x^2 dy = \omega_0 - \omega$   
non è chiusa  
 $\omega$  non è esatta

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_0 - \int_{\gamma} x^2 dy$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix} \quad t \in [-2, 2]$$

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \pi$$



$$\int_{\gamma} x^2 dy = \int_{-2}^2 t^2 \cdot 2t dt = 2 \int_{-2}^2 t^3 dt = 2 \left[ \frac{t^4}{4} \right]_{-2}^2 = 0$$

$$\int_a^b (x(t))^2 y'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} \omega = \pi$$

Esercizio: fare lo stesso calcolo per

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi/2]$$

(verificando prima che  $|\sigma(t)| \neq 0 \quad \forall t$ )

$$\omega(x, y) = \frac{\alpha x y}{x^4 + y^2} dx + \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy$$

$\swarrow A$ 
 $\searrow B$

$\alpha \in \mathbb{R}$  parametro

Per quali  $\alpha$   $\omega$  è chiusa?

Per quali  $\alpha$   $\omega$  è esatta?

Domanda di definizione

$\mathbb{R}^2 \setminus (0)$

$$\omega \text{ chiusa} \iff \partial_y A = \partial_x B$$

$$\partial_x B = \frac{2x(x^4+y^2) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{-2x^5 + 2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\partial_y A = \alpha x \frac{x^4+y^2 - y \cdot (2y)}{(x^4+y^2)^2} = \frac{\alpha x^5 - \alpha x y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

$$\omega_\alpha \text{ chiusa} \iff \alpha = -2$$

---

x caso: cercare una curva omotopa a  $\gamma_0 = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$  in modo che il calcolo  $\int_\gamma \omega_2$  venga semplice

---

Proviamo a integrare

$$\begin{aligned} U(x, y) = \int B \, dy &= \int \frac{x^2}{x^4+y^2} \, dy = \int \frac{1/x^2}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} \, dy \\ &\quad \left. \begin{array}{l} \frac{y}{x^2} = t \\ \frac{dy}{x^2} = dt \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{aligned} &\dots \\ &= \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) + C \end{aligned} \end{aligned}$$



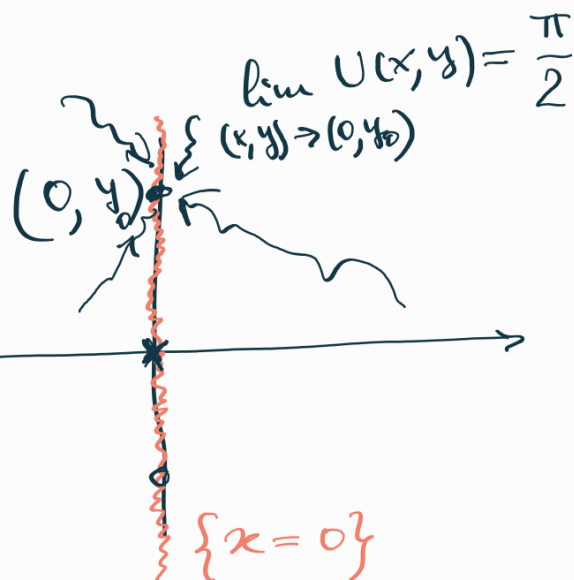
Si verifica facilmente che

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A \iff C(x) = \cos x$$

$$U(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$dU = \omega$$

$$U: \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$\tilde{U}(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & \text{per } x \neq 0 \\ \pi/2 & \text{per } \begin{cases} x=0 \\ y > 0 \end{cases} \\ -\pi/2 & \text{per } \begin{cases} x=0 \\ y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\tilde{U}$  è continua

$\tilde{U}$  è differenziabile e  $d\tilde{U} = \omega_2$

verificare per caso

sugg:  
 $\arctan \frac{y}{x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x^2}{y}$

---

Es: Sia  $\omega = \frac{y dx - x dy}{(y-x)^2 + x^2}$

determinare il dominio di  $\omega$

dire se è chiuso, se è esatto (e nel caso det. potenz)

Ric. Stud di Venerdì <sup>1</sup> ore 14.30

14 mar 2023

$$\omega = \omega_0 - x^2 dy$$

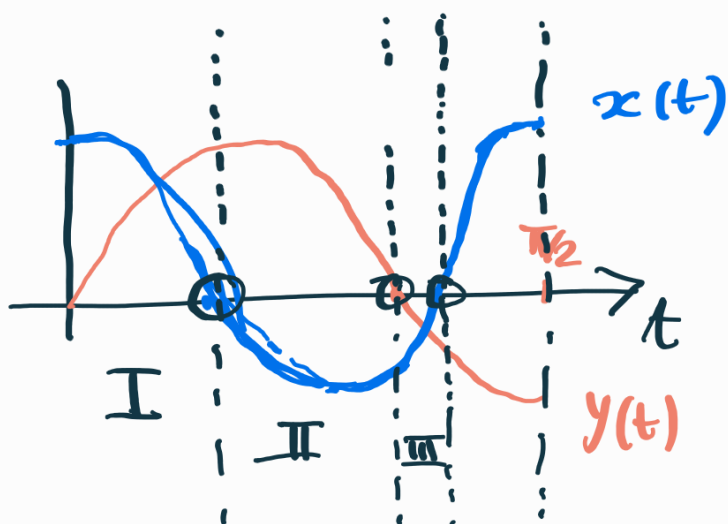
$$\omega_0 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

con  $\gamma(t) = (\cos 4t, \sin 3t)$   
 $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

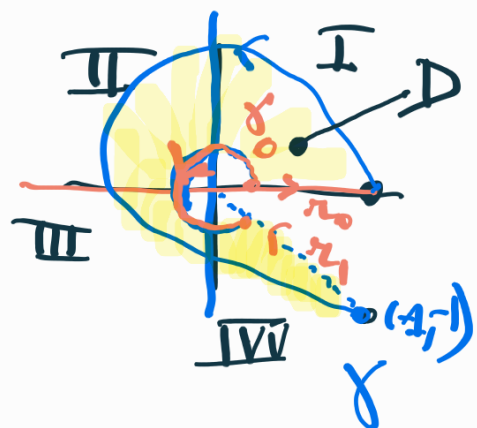
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_0 - \int_{\gamma} x^2 dy$$

fare il conto



$$\gamma(0) = (1, 0)$$

$$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (1, -1)$$



$$\int_{\gamma} \omega_0 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

— o —

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0$$

o perché  
 $\omega = P dx + Q dy$   
 è chiusa

$$\int_{\partial D} \omega_0 = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

$$+\partial D = \gamma \circ \pi_1 * (-\gamma_0) * \pi_0$$

$$0 = \int_{+\partial D} \omega_0 = \int_{\gamma} \omega_0 + \cancel{\int_{\pi_1} \omega_0} - \int_{\gamma_0} \omega_0 + \cancel{\int_{\pi_0} \omega_0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma_0} \omega_0$$

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \text{di classe } C'$$

$$i(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0$$

se  $\gamma$  chiusa  
 $\Rightarrow i(\gamma) \in \mathbb{Z}$

$$\Phi: (0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(p, \theta) \longrightarrow \begin{pmatrix} p \cos \theta \\ p \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{se } \tilde{\gamma}: [a, b] \longrightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad \text{allora}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_{\phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_a^b \theta'(t) dt \quad \boxed{x dy - y dx}$$

$$\int_{\Phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 = \int_a^b \frac{N}{\rho^2(t)} dt = (*)$$

$$\Phi \circ \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \theta(t) \\ \rho(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$dx \leadsto \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \cdot \theta'$$

$$dy \leadsto \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta \cdot \theta'$$

$$N = \rho \cos \theta (\cancel{\rho' \sin \theta} + \cancel{\rho \cos \theta \cdot \theta'}) - \rho \sin \theta (\cancel{\rho' \cos \theta} - \rho \sin \theta \cdot \theta')$$

$$= \rho^2 \cos^2 \theta \theta' + \rho^2 \sin^2 \theta \theta' = \rho^2 \theta'$$

$$(*) = \int_a^b \frac{\rho^2 \theta'}{\cancel{\rho^2}} = \int_a^b \theta' dt$$

Osservazione: se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe  $C^1$   
con  $\gamma(a) = \gamma(b)$

allora, fissato  $p \in \Phi^{-1}(\gamma(a))$ ,

$\exists!$   $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe  $C^1$

tale che  $\Phi(\tilde{\gamma}) = \gamma \quad \Phi(\tilde{\gamma}(a)) = p$

e in particolare si ha

$$\Phi(\tilde{\gamma}(b)) = \gamma(b) = \gamma(a)$$

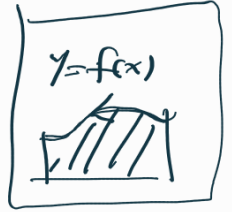
$$\Phi^{-1}(\gamma(a)) = \{ p + k(0, 2\pi) : k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\phi(\tilde{\gamma})} \omega_0 = \int_{\tilde{\gamma}} d\vartheta = \vartheta(b) - \vartheta(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\int_{+\partial D} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

Caso particolare: formula dell'area

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_{+\partial D} x dy = - \int_{+\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x dy - y dx$$



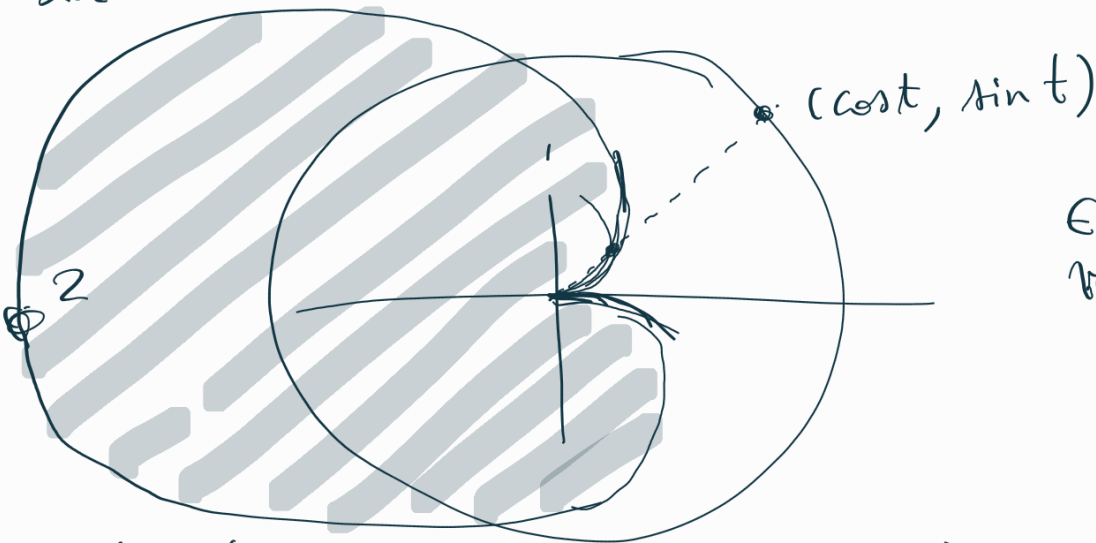
Esempio: Determinare l'area racchiusa dalla curva

$$\gamma: \begin{cases} x(t) = (1 - \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 - \cos t) \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

La curva è iniettiva

$$1 - \cos t \geq 0$$

$$\wedge > \text{ se } t \neq 0 \text{ mod } 2\pi$$



Esercizio:  
verificare che  
 $|\gamma'(t)| \neq 0$

$$x dy - y dx = (1 - \cos t) \cos t [\sin^2 t + (1 - \cos t) \cos t] - (1 - \cos t) \sin t [-\sin t + 2 \cos t \sin t]$$

$$= (1 - \cos t) \left[ \cos t \sin^2 t + \cos^3 t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin^2 t \right]$$

$$= (1 - \cos t) \left[ 1 - (\cos^2 t + \sin^2 t) \cos t \right]$$

$$= (1 - \cos t)^2$$

$$\text{Area } D = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - 2\cos t + \cos^2 t] dt$$

$$= \pi + \frac{1}{2} (2\pi) \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \pi$$

TEO:  $D$  dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$   
 con bordo di lunghezza finita ( $\ell = 2\pi$ )  
 omeomorfo al disco unitario  
 allora ha area minore o uguale a  $\pi$

$\text{Area}(D) \leq \pi$  e vale  $\Leftrightarrow D$  è  
 un disco di raggio 1

$\gamma$  la parametrizzazione di  
 $\partial D$  per lunghezza d'arco

[Se  $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\dot{\gamma}(t)| > 0$  definisco

$$s(t) := \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \quad s'(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$$

$$s: [a, b] \rightarrow [0, \ell(\gamma)]$$

posto  $g: [0, l(\gamma)] \rightarrow [a, b] \quad g \equiv s^{-1}$

$$\tilde{\gamma} \doteq \gamma \circ g: [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$|\dot{\tilde{\gamma}}| \equiv 1 \leftarrow \text{verificare}$$

Parametrizzazione di  $\gamma$  per lunghezza d'arco

$$l(\tilde{\gamma}_{[0,s]}) = s \quad \forall s \in [0, l(\gamma)]$$

$$\gamma: \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{Parametrizz di } \partial D \text{ per lunghezza d'arco}$$

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} [x'(t)^2 + y'(t)^2] dt$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y' - y x') dt$$

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

$$z \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

$$l(\partial D) = \int_0^{2\pi} \dot{z} \overline{\dot{z}} dt = \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2 dt$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\overline{z} z')$$

$\nwarrow$   $2\pi$ -periodica



$$z = \sum c_k e^{ikt}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) e^{-ikt} dt$$

$$\dot{z}(t) = \sum ikc_k e^{ikt}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}$$

$$l(\partial D) = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} |kc_k|^2$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2$$

$$\text{Area}(D) = \frac{\text{Im}}{2} \left( 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \overline{c_k} c_k \right)$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2}} \sum k |c_k|^2 \quad (*)$$

OSS  $l(\partial D) = 2\pi \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2 = 1$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_*} k^2 |c_k|^2$$

$$\text{Area}(D) \leq \pi$$

OSS/et: l'uguaglianza vale

$$\Rightarrow c_k = 0 \quad \forall k \neq 1$$

$$c_1 = 1$$

~~✗~~

21 mar . 2023

INTEGRAZ. su  $k$ -superfici

$$k \leq n$$

$$U \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ regolare}$$

$\varphi$  iniettiva

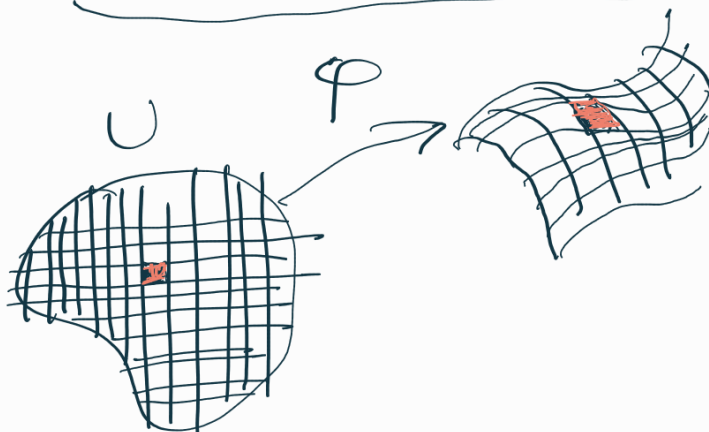
$$\text{rk}(D\varphi(x)) = k$$

$$\Sigma = \varphi(U)$$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \underbrace{\sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}}_{J_\varphi(x)} dx$$

$$J_\varphi(x) \text{ fattore di dilatazione}$$

$$\int_\Sigma f = \int_U (f \circ \varphi)(x) J_\varphi(x) dx$$



Casi Particolari & esempi

Caso di superficie che un grafico

$$U \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$u: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Sigma = \{(x, u(x)) : x \in U\}$$

$$\varphi: x \rightarrow (x, u(x))$$

$$\int_\Sigma f = \int_U f(x, u(x)) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx$$

Calcolo della superficie della sfera di raggio  $r$   $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

$$u(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$U = \{x^2 + y^2 \leq r^2\}$$



$$H^2(\Sigma^+) = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq r^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}} dx dy \quad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x}{r \sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$|\nabla u|^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{r \sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$

$$(*) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-\rho^2}} \rho d\rho = 2\pi r^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\rho d\rho}{r} \quad \rho/r = y$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y dy = 2\pi r^2 \left[ -\sqrt{1-y^2} \right]_0^1 = 2\pi r^2$$

$$\text{Area } \Sigma = 4\pi r^2$$

Esercizio:

① Trovare l'area della regione  $R > 0$   
 $\{ x^2+y^2+z^2 = R^2, z \geq 0, x^2+y^2 \leq Rx \}$



② Area della regione  
 $\{ z = x \cdot y : x^2+y^2 \leq 1 \}$

$$x - Rx + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

# Superfici di Rotazione

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} p(t) \cos \theta \\ p(t) \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$t \in [a, b]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$D\varphi = (\varphi_t, \varphi_\theta)$$

$$D\varphi^T D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_t \cdot \varphi_t & \varphi_t \cdot \varphi_\theta \\ \varphi_\theta \cdot \varphi_t & \varphi_\theta \cdot \varphi_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$$

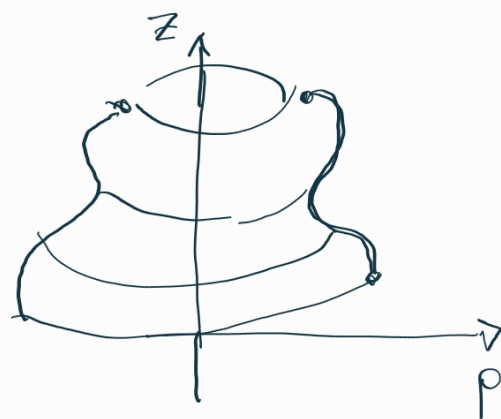
$$J_\varphi(t, \theta) = p \sqrt{(p')^2 + (z')^2}$$

$$\text{Se } \Sigma = \varphi([a, b] \times [0, 2\pi])$$

$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b p \sqrt{(p')^2 + (z')^2} dt$$

Area di un toro

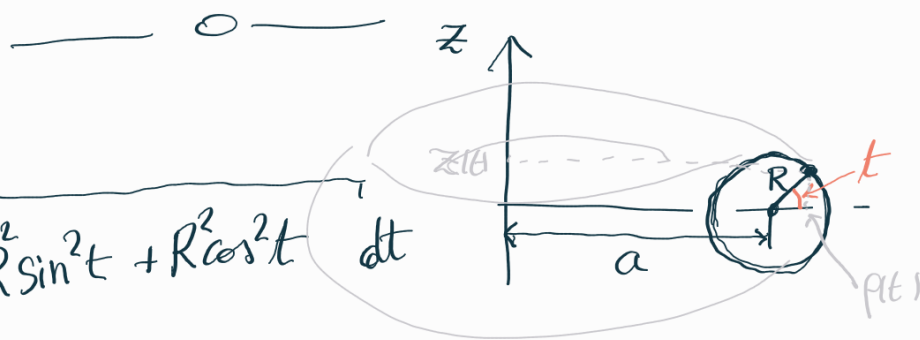
$$H^2(\Sigma) = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt$$



$$\varphi_t = \begin{pmatrix} p' \cos \theta \\ p' \sin \theta \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\varphi_\theta = \begin{pmatrix} -p \sin \theta \\ p \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_\varphi = \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$$



$$= 2\pi R \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) dt$$

$$= 4\pi^2 R a$$

$$\rho(t) = a + R \cos t$$

$$z(t) = R \sin t$$

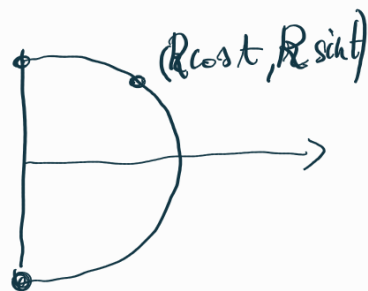
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Esercizio: Fare lo stesso calcolo per ricavare la superficie della sfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\partial_x r = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{div} F = \partial_x \left( \frac{x}{r^3} \right) + \partial_y \left( \frac{y}{r^3} \right) + \partial_z \left( \frac{z}{r^3} \right)$$

$$\partial_x \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} + x \cdot \partial_x (r^{-3})$$

$$= \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5}$$

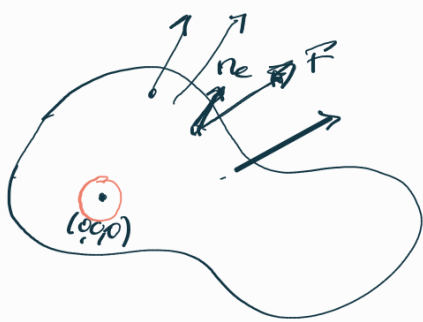
$$\partial_x (r^{-3}) = -3r^{-4} \partial_x r$$

$$= -\frac{3x}{r^5}$$

$$\partial_y \left( \frac{y}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - 3 \frac{y^2}{r^5}$$

$$\partial_z \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} - 3 \frac{z^2}{r^5}$$

$$\operatorname{div} F = \frac{3}{r^3} - 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = 0$$



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

aperto  
limitato  
con bordo  
liscio

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n_e = \iint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = 0$$

è vero?

(applicando il teorema della divergenza)

Sì, se  $(0,0,0) \notin \overline{\Omega}$

Se  $(0,0,0) \in \Omega$  applico il teorema della divergenza  
a  $\Omega \setminus B_\varepsilon(0)$

con  $\varepsilon$  piccolo  
in modo che  
 $\overline{B_\varepsilon(0)} \cap \partial\Omega = \emptyset$

$$\iint_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(0))} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \iint_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \operatorname{div} F = 0$$

||

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e - \iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e$$

$$n_e = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

$$F = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$F \cdot n_e = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{è costante su } \partial B_\varepsilon(0))$$

$$\iint_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi \varepsilon^2 = 4\pi$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \begin{cases} 0 & (0,0,0) \in \overline{\Omega} \\ 4\pi & (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

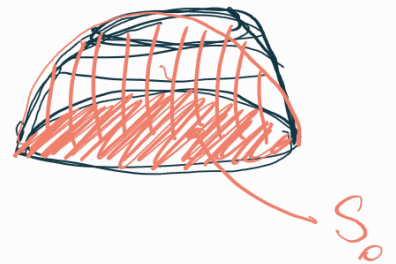
Esercizio:  $S = \{x^2 + y^2 + z^4 = 1; z \geq 0\}$

$$F(x, y, z) = (x, y, x + y - 2z)$$

Calcolare  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e$

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$V = \{x^2 + y^2 + z^4 \leq 1; z \geq 0\}$$



$$\partial V = S \cup S_0$$

$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e$$

(0, 0, -1)

Calcolo questo

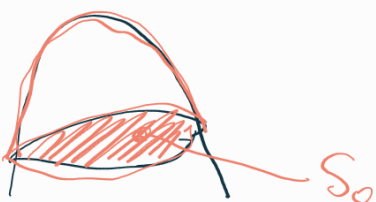
$$\int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = - \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x + y) dx dy = 0$$

Quindi  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = 0$

Es Calcolare  $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}$

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$$

$$S = \{z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$$



Due modi possibili 1) Calcolo usando la definizione.

$$2) \int_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}_e$$

dove  $V$  è il volume bordato  
da  $S \cup S_0$

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (x, y, 2-x^2-y^2) \quad \text{Param. cartesiane}$$

$$U = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$\eta_e = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_U \vec{F}(x, y, 2-x^2-y^2) \cdot \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|} \cdot |\varphi_x \wedge \varphi_y| dx dy = (*)$$

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \quad \varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = e_1(2x) + e_2(2y) + e_3$$

$$F = (x^2, y^2, z)$$

$$(*) = \int_{x^2+y^2 \leq 2} \left( \overbrace{x^2(2x)}^{\text{non danno contributo}} + \overbrace{y^2(2y)}^{\text{non danno contributo}} + 2-x^2-y^2 \right) dx dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq 2} 2-x^2-y^2 dx dy$$

finire per casa



23 mar 2023

$$\vec{F}: \underbrace{\Omega}_{\cap \mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \left( \begin{array}{l} \text{di} \\ \text{classe } C^1 \end{array} \right)$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$\text{rot} \vec{F} = \mathbf{e}_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \mathbf{e}_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \mathbf{e}_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

1  
2  
3

( $\varphi, \vec{F}$  di classe  $C^2$ )

NABLA-CALCOLO

a)  $\text{rot}(\nabla \varphi) = 0$   $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$

$\nabla$   
 $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

b)  $\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0$   $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

$\nabla \varphi$  gradiente  
 $\nabla \cdot \vec{F}$  divergenza  
 $\nabla \times \vec{F}$  rotore

a)  $\nabla \varphi = (\partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi, \partial_3 \varphi)$

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = \mathbf{e}_1 (\partial_2 \partial_3 \varphi - \partial_3 \partial_2 \varphi) + \dots$$

$= 0$  per Teorema di Schwarz

$$\textcircled{6} \quad \text{rot } \vec{F} = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \partial_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

$$= 0$$

$$\text{OSS: } \vec{F}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{---} \quad \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^3$$

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \iff F = \nabla \varphi$$

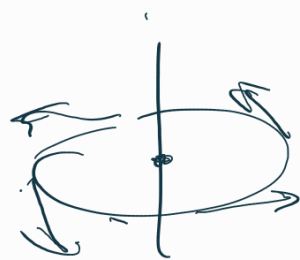
per  $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

Sì, ma solo se

$\Omega$  è semplicemente connesso

~~Esercizio~~: trovare un controesempio  
 $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{asse } z \}$

$$F(x, y, z) = \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (\Omega \text{ aperto})$$

$$G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$G$  di classe  $C^1$

$$\text{div } G = 0 \quad \xRightarrow{(b)} \quad \exists \vec{F} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{rot } \vec{F} = \vec{G}$$

un tale  $\vec{F}$  viene  
chiamato **POTENZIALE  
VETTORE**

dipende  
(falso in generale)

CONTROESEMPIO

$$G(x, y, z) = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

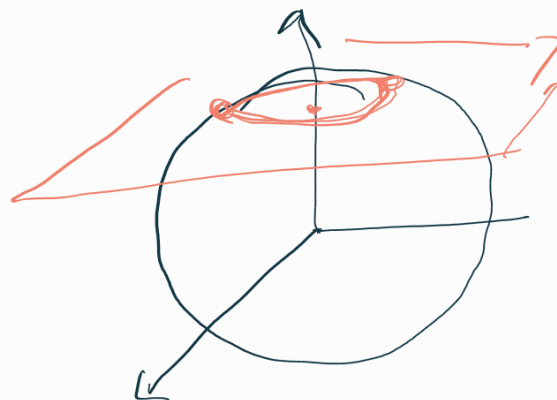
$$\text{div } \vec{G} = 0 \quad \text{su } \Omega$$

CLAIM:  $G$  non è il rotore di alcun  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Per assurdo:  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{rot } \vec{F} = \vec{G}$

$$a \in (0, 1)$$

$$S_a = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \leq a\}$$



$$\iint_{S_a} G \cdot n_e = \iint_{S_a} \operatorname{rot} F \cdot n_e = \oint_{\partial S_a} \vec{F}$$

$$a \rightarrow 1 \quad \downarrow$$

$$\iint_{S'} G \cdot n_e \parallel 4\pi$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$a \rightarrow 1$$

ASSURDO!

Prop:  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$   $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$

$$G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{t.c.} \quad \operatorname{div} G = 0$$

$$\text{Allora } \exists F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \quad \text{t.c.} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = G$$

Es1: Sia  $G = (1, 1, 1)$  determ.  $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$   
t.c.  $\operatorname{rot} F = G$

Es2: Sia  $G = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$   $\Omega = \{z > 0\}$

determinare  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  t.c.

$$\operatorname{rot} F = G$$

Dim (Prop):

$$G = \operatorname{rot} F \Leftrightarrow \begin{cases} G_1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 & (1) \\ G_2 = \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 & (2) \\ G_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 & (3) \end{cases}$$

$$G_2 = -\partial_1 F_3$$

$$G_3 = \partial_1 F_2$$

Oss: se  $F, \tilde{F}$   $\text{rot} F = G = \text{rot} \tilde{F}$

$$\text{rot}(F - \tilde{F}) = 0 \Rightarrow F - \tilde{F} = \nabla U$$

$\uparrow$   $\Omega$  simply connected

$$\boxed{F_1 = 0 \text{ su } \Omega} \quad \text{ANSATZ}$$

$x_0 \in I_1$   
fissato  
arbitrario.

$$F_3(x, y, z) - \underbrace{F_3(x_0, y, z)}_{f(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_3(t, y, z) dt \stackrel{(2)}{=} - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt$$

$$F_3(x, y, z) = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt + \cancel{f(y, z)}$$

$$F_2(x, y, z) - \underbrace{F_2(x_0, y, z)}_{h(y, z)} = \int_{x_0}^x \partial_1 F_2(t, y, z) dt \stackrel{(3)}{=} \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt$$

$$F_2(x, y, z) = \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt + h(y, z)$$

$$\text{ANSATZ: } f(y, z) = 0$$

Cerco  $h \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$  in modo che  
anche la relazione (1) sia verificata

$$G_1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \quad (1)$$

$$G_1(x, y, z) = - \int_{x_0}^x \partial_2 G_2(t, y, z) dt - \int_{x_0}^x \partial_3 G_3(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$$\boxed{\text{div } G = 0} \Rightarrow \int_{x_0}^x \partial_1 G_1(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z)$$

$$= G_1(x, y, z) - G_1(x_0, y, z) - \partial_z h(y, z)$$

$$\partial_z h(y, z) = -G_1(x_0, y, z)$$

$z_0 \in I_3$  arbitrario

$$h(y, z) \doteq - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, s) ds$$

Conclusione: il campo

$x_0 \in I_3$   
 $x_0 \in I_1$

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = \int_{x_0}^x G_3(t, x, y) dt - h(y, z)$$

$$F_3 = - \int_{x_0}^x G_2(t, x, y) dt$$

$$\text{soddisfa } \text{rot } \vec{F} = \vec{G}$$

Sia

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

$\Gamma$  curva definita da  $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = y \end{matrix} \right\}$

Calcolare  $\oint_{\Gamma} F$  ↗ direttamente  
↘ usando il th di Stokes

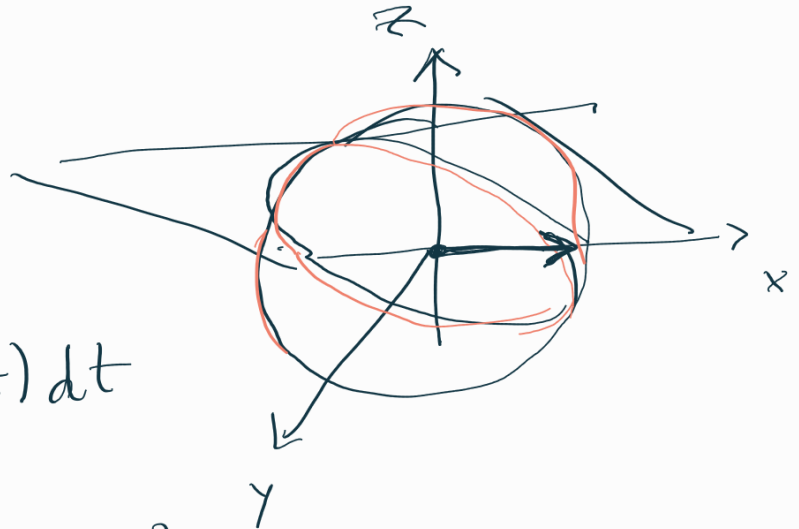
$\gamma$  può essere scritta come  $\phi = (0, 0)$   
 con  $\phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ z - y \end{pmatrix}$

$$\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{rk}(D\phi(p)) = 1$$

$$\forall p \in \phi^{-1}(0)$$

Verificare per  
esercizio



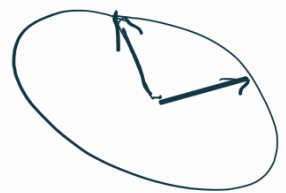
$$\oint_{\gamma} \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

con  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$   
 è una parametrizzazione della curva

$$e_1 = (1, 0, 0) \in \Gamma$$

$$v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in \Gamma$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \end{pmatrix} \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix}$$



$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} [(y+z) x'(t) + (z+x) y'(t) + (x-y) z'(t)] dt$$



$$= \int_0^{2\pi} \left[ \sqrt{2} \sin t (-\sin t) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \cos t \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \left( \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\sqrt{2} \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 t \right] dt$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t - \sin^2 t dt = 0$$

Calcolo via Stokes

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$\text{cone } \Sigma = \{ y=z \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 \}$$



$$\left( \tilde{\Sigma} = \{ x^2+y^2+z^2=1, \quad y-z \leq 0 \} \right)$$

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{F} = \iint_{\Sigma} [-2, 0, 0] \cdot \vec{n}$$

$$F = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\text{rot } F = e_1 \left[ \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \right] + e_2 \left[ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \right] + e_3 \left[ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \right]$$



$$\Sigma = \{ (Y-Z) = 0 + (x) \}$$

$$n = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[-2, 0, 0] \cdot n \equiv 0$$



28 mar 2023

Oss:  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  "dominio ammissibile"  
 $\Omega \supseteq D$  aperto  
 $f \in C^2(\Omega)$ . Allora

$\curvearrowright$  soddisfa le ipotesi  
del thm divergente

$$\int_{\partial D} \vec{\nabla} f \cdot \mathbf{n}_e = \int_D \operatorname{div}(\vec{\nabla} f) dx$$

$$= \int_D \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} (\partial_{x_i} f) = \int_D \Delta f dx$$

Oss: In particolare, se  $\Delta f \equiv 0 \Rightarrow$   
il flusso attraverso il bordo di dominio è nullo  
————— 0 ———

Prop:  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Sono equivalenti le cond seguenti

(a)  $\Delta f(p) = 0 \quad \forall p$

(b)  $\forall p \in \mathbb{R}^n$   
 $\forall r \in (0,1]$   $\underbrace{\frac{1}{n \omega_n r^{n-1}}}_{\text{red}} \int_{\partial B_r(p)} f = f(p)$

dove  $\omega_n = \operatorname{Vol}_n(B_1)$

$n=3$   
 $3 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^2$

$$(c) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \\ \forall r \in (0,1)$$

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} f = f(p)$$

$[ (a) \Rightarrow (b) ]$

S.p.g.

$$p=0$$

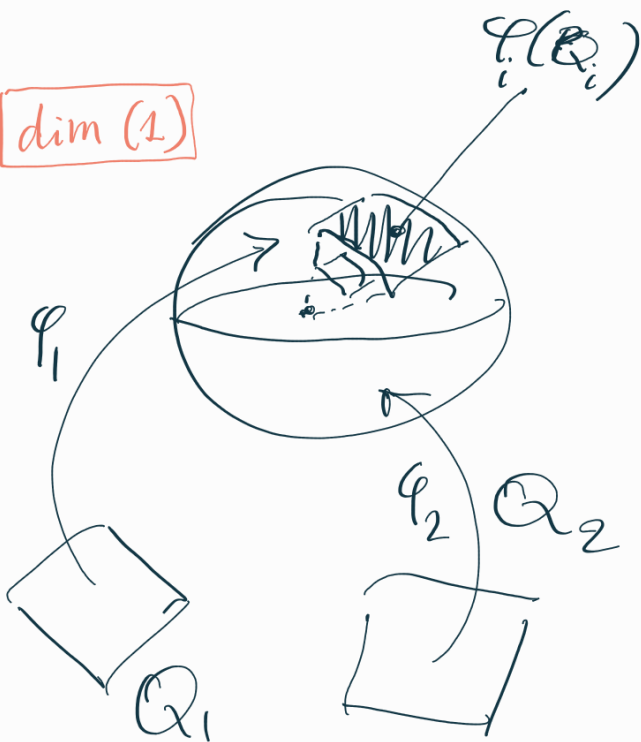
$$\tilde{f}(x) = f(x-p)$$

$$\mu(r) \doteq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f_r$$

$$f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x})$$

$$r \in [0,1]$$

$\dim(1)$



$$\int_{\partial B_1} f_r = \int_{\varphi_1(Q_1)} f_r + \int_{\varphi_2(Q_2)} f_r$$

$$\varphi_i: Q_i \longrightarrow \partial B_1(0)$$

$$\int_{\varphi(Q)} f_r = \int_Q f_r(\varphi(u)) \cdot J_\varphi(u) du \stackrel{(*)}{=}$$

$$u \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\psi(x) \doteq r \varphi(x)$$

$$(*) = \int_Q f(\psi(u)) \cdot \frac{J_\psi(u)}{r^{n-1}} du = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} f$$



$$J_{\varphi}(u) = \sqrt{\det(D\varphi^T \cdot D\varphi)}$$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \dots & \partial_{n-1} \varphi_1 \\ \partial_1 \varphi_2 & & \vdots \\ \vdots & & \partial_{n-1} \varphi_n \\ \partial_1 \varphi_n & & \partial_{n-1} \varphi_n \end{pmatrix}$$

$$[D\varphi^T \cdot D\varphi]_{ij} = (\partial_i \vec{\Phi}) \cdot (\partial_j \vec{\Phi})$$

← matrix  $(n-1) \times (n-1)$

$$[D\psi^T \cdot D\psi]_{ij} = r^2 [D\varphi^T \cdot D\varphi]_{ij}$$

$$\psi(u) = r \varphi(u)$$

$$\det(D\psi^T D\psi) = r^{2(n-1)} \det(D\varphi^T D\varphi)$$

$$J_{\psi} = r^{n-1} J_{\varphi}$$

$$\mu(r) \doteq \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f_r \quad (1)$$

$$\mu_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\varphi(Q)} f_r = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q f_r(\varphi(u)) J_{\varphi}(u) du$$

$$f_r(\vec{x}) = f(r\vec{x})$$

$$\mu'_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q \nabla f(r\varphi(u)) \cdot \varphi(u) J_{\varphi}(u) du$$

$$\varphi(u) = \frac{\psi(u)}{|\psi(u)|}$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_Q \nabla f(\psi(u)) \frac{\psi(u)}{|\psi(u)|} J_{\psi}(u) du$$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e$$

$$\mu'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} \vec{\nabla} f \cdot \vec{n}_e$$

$$\text{Se } \Delta f = 0 \Rightarrow \mu'(r) = \underbrace{\circledast}_{=0} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \overbrace{\operatorname{div} \vec{\nabla} f}^{\Delta f} dx$$

$$\Rightarrow \mu(r) \equiv \text{cost} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \mu(r) = f(0)$$

$$[(b) \Rightarrow (a)] \quad \text{Spq } p=0$$

$$\mu(r) = \text{cost} \Rightarrow \mu'(r) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \Delta f dx \equiv 0 \Rightarrow \Delta f(0) = 0$$

Oss: Se  $g$  funz. continua e

$$\int_{B_r(0)} g(x) dx = \omega_n r^n g(0) + o(r^n)$$

per  $r \rightarrow 0$

Lemma  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$$J(r) \doteq \int_{B_r(0)} u(x) dx$$

Allora  $J(r) = \omega_n r^n u(0) + c(n) \Delta u(0) r^{n+2} + o(r^{n+2})$

Dim:  $u(x) = u(0) + \underbrace{\nabla u(0) \cdot x}_{\substack{\uparrow \\ \sum_{ij} \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j}} + \frac{1}{2} x^T H_u(0) x + o(|x|^2)$

$$J(r) = u(0) \omega_n r^n + \underbrace{\int_{B_r(0)} \nabla u(0) \cdot x \, dx}_0 + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \int_{B_r(0)} x_i x_j \, dx + o(r^{n+2})$$

$$\int_{B_r(0)} x_i x_j \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \int_{B_r(0)} x_i^2 \, dx = \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} |x|^2 \, dx = \frac{\omega_n r^{n+2}}{n+2} \end{cases}$$

$\varphi$  è funzione reale  $\ell'$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) \, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \overbrace{n \omega_n t^{n-1}}^{\ell'} \, dt$$

$$\varphi(t) = t^2 \chi_{[0,r]}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) \, dx = \int_0^{+\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} \, dt = \int_0^r t^{n+1} n \omega_n \, dt$$

$$\int_{B_r(0)} |x|^2 \, dx = \frac{r^{n+2}}{n+2} n \omega_n$$

$$J(r) = n\omega_n r^n + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(0) \left( \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} \right) + o(r^{n+2})$$

$$= n\omega_n r^n + \frac{\omega_n}{2n+2} r^{n+2} \Delta u + o(r^{n+2})$$

Se

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} f(x) dx = f(p)$$

$$\bar{f}(x) = f(x) - f(p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} \bar{f}(x) dx = 0$$

$$\parallel \frac{1}{\omega_n r^n} \left[ \frac{\omega_n}{2n+2} r^{n+2} \Delta f(0) + o(r^{n+2}) \right]$$

$$\parallel \frac{1}{2n+2} r^2 \Delta f(0) + o(r^2)$$

per  $r \rightarrow 0$

Questa è vera se  $\Delta f(0) = 0$

(b)  $\Rightarrow$  (c)

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{|x-p|=r} f \right) dr = \int_0^R (f(p) n\omega_n r^{n-1}) dr$$

$$= f(p) \omega_n R^n$$

integr. in gusci sferici

(vedi lez. seguente)

Es (per corso)

Sia  $\gamma(t) = (1 + \cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \omega$$

dove  $\omega(x, y) = (\sin y - y) dx + x(\cos y + 1) dy$

sugg: Scrivere  $\omega$  come la somma  
di una forma esatta e  
una forma "semplice"

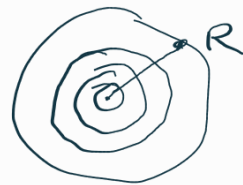
————— 0 —————



29 mar 2023

# INTEGRAZIONE "PER GUSCI SFERICI"

$$(\star) \int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{S(r)} f \right) dr$$



$$x \in \mathbb{R}^n$$

$p \in \mathbb{R}^n$  fissato

$$S(r) = \{ |x - p| = r \}$$

utilizzando la formula si ottiene immediatamente  
 $(b) \Rightarrow (c)$  nel teorema di ierò

$$\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \left( \int_{\partial B_R(p)} f \right) = f(p) \quad (b)$$

$$\frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(p)} f(x) dx = f(p) \quad (c)$$

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx \stackrel{(\star)}{=} \int_0^R \left( \int_{\partial B_r(p)} f \right) dr \stackrel{(b)}{=} \int_0^R f(p) n\omega_n r^{n-1} dr$$

$$= f(p) \omega_n \left[ r^n \right]_0^R = f(p) \omega_n R^n$$

↑  
 $(c)$   
 è dimostrato

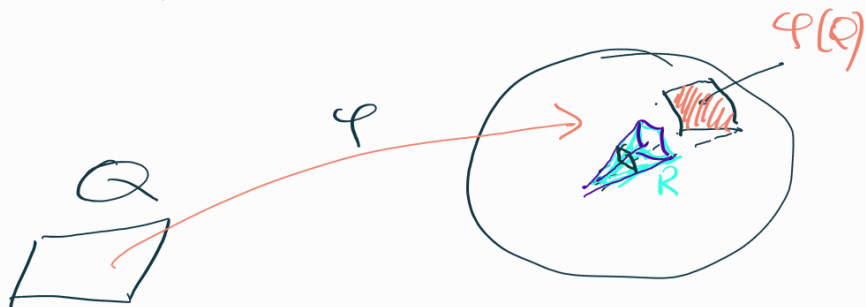
$$(\star) \int_{B_R(P)} f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{S(r)} f \right) dr$$

← dimostriamo questa

LEMMA:  $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  dominio  
 $\vec{\varphi} \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{\varphi}$  iniettiva,  $|\vec{\varphi}| = 1$

$$J_{\varphi} > 0$$

$\varphi$  parametrizza una porzione di sfera unitaria



$$\Phi: [0, R] \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(r, u) \rightarrow r \varphi(u)$$

$\Phi$  parametrizza una parte di cono generato da  $\varphi(Q)$

$$C = \Phi([0, R] \times Q)$$

$$(\star') \int_C f(x) dx = \int_0^R \left( \int_{C(r)} f \right) dr$$

$$C(r) = C \cap \{|x| = r\}$$

oss:  $(\star') \Rightarrow (\star)$

$$B_R(0) = \bigcup C_j$$

$$\bigcup C_j(r) = S_r$$

$$\int_{B_R(0)} f dx = \sum_j \int_{C_j} f dx \stackrel{(\star')}{=} \sum_j \int_0^R \left( \int_{C_j(r)} f \right) dr = \int_0^R \left( \sum_j \int_{C_j(r)} f \right) dr$$

$$= \int_0^R \left( \int_{S_r} f \right) dr$$

$$\int_C f(x) dx = \int_{[0,R] \times Q} f(r\varphi(u)) \boxed{|\det D\Phi(r,u)|} dr du \quad C = \Phi([0,R] \times Q) \quad \textcircled{a}$$

$$\Phi(r,u) = \begin{pmatrix} r\varphi_1(u) \\ \vdots \\ r\varphi_n(u) \end{pmatrix} \quad D\Phi(r,u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & r\partial_{u_1}\varphi_1(u) & \dots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_1(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(u) & r\partial_{u_1}\varphi_n(u) & \dots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_n(u) \end{pmatrix}$$

Binet

$$|\det D\Phi| \stackrel{\downarrow}{=} \sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} = (*)$$

$$D\Phi^T \cdot D\Phi = \begin{pmatrix} |\vec{\varphi}|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left[ r^2 \partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \partial_{u_j} \vec{\varphi} \right]_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} & & \end{pmatrix}$$

$(\partial_{u_i} \vec{\varphi}) \cdot \vec{\varphi} = 0$

$$\sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)} = r^{(n-1)} J_\varphi(u)$$

$$(J_\varphi(u) = \sqrt{D\varphi^T \cdot D\varphi})$$

$$\textcircled{a} = \int_{[0,R] \times Q} f(r\varphi(u)) J_\varphi(u) r^{n-1} du dr$$

$$= \int_0^R \left( \int_Q \underbrace{f(r\varphi(u))}_{\psi} \underbrace{\int_{\varphi}^{\varphi} (u)}_{J_{\varphi}} r^{n-1} du \right) dr$$

$$= \int_0^R \left( \int_{C(r)} f \right) dr$$

$$C(r) = C \cap \{|x|=r\}$$

(.)

$$\vec{\varphi}: Q \longrightarrow \{|x| \leq 1\}$$



$$\partial_{u_i} \vec{\varphi} \cdot \vec{\varphi}$$



$$|\vec{\varphi}|^2 = 1$$

$$\partial_{u_i} (|\varphi|^2) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \vec{\varphi} \cdot \partial_{u_i} \vec{\varphi} = 0$$

————— 0 —————

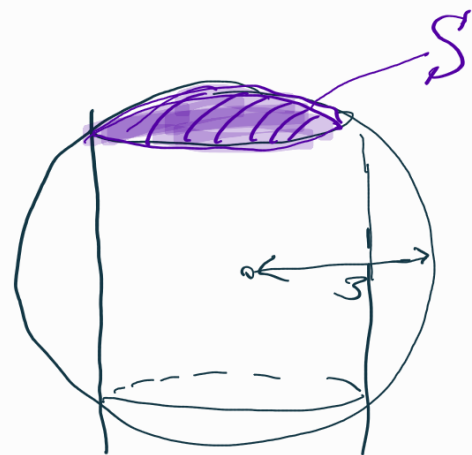
Es:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{1+y^2} + 3z^2 \\ 2z - \log(1+y^2) \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \geq 0\}$$

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}^+ = ?$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2} + 0 = 0$$



$$\partial V = S \cup S_0$$

dove  $S_0$  è un disco

$$V = ?$$

$$\oplus \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ -(x^2 + y^2) \geq -4 \end{cases}$$

$$S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z^2 \geq 5, \quad z \geq 0\}$$

$$= \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad z \geq \sqrt{5}\}$$

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z \geq \sqrt{5}\}$$

$$\partial V = S \cup S_0$$

$$S_0 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad z = \sqrt{5}\} \\ = \{x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = \sqrt{5}\}$$

$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}^+ - \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ \quad \uparrow$$

$$\int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{n}^+ = \int_{S_0} \vec{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} 2 \, dx \, dy = 8\pi$$



Es:  $F = \begin{pmatrix} (x + e^{xz})z \\ -yz \\ x(y + e^{xz}) \end{pmatrix}$

$$\oint_{\gamma} \vec{F}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} [\cos t + e^{\cos t \cos 2t}] \cos 2t (-\sin t) + (-\sin t \cos 2t) \cos t + \cos t (\sin t + e^{\cos t \cos 2t}) - (-2 \sin 2t) \, dt$$

(poco gestibile)

$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \{x^2 + y^2 = 1, \quad z = x^2 - y^2\}$$

$\gamma$  parametrizza  
 $\partial S$

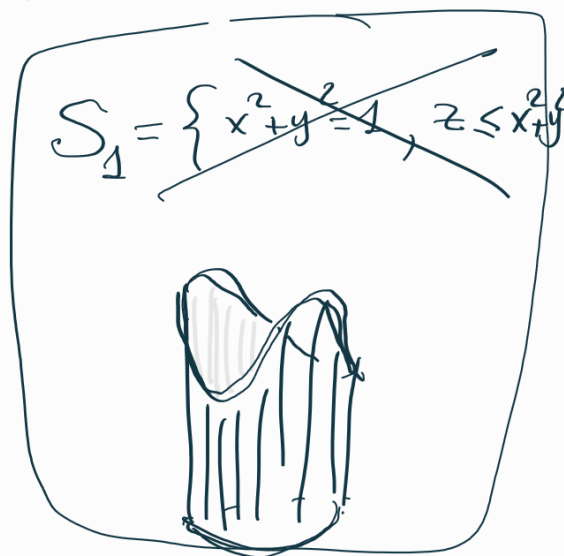
dove  $S = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = x^2 - y^2\}$



$$\oint_{\gamma} \vec{F} = \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} zx + e^{xz} z \\ -yz \\ xy + xe^{xz} \end{pmatrix}$$

attenzione  
al segno  
bisogna prendere  
la normale  
 $\vec{n}^+$



$$\text{rot} \vec{F} = e_1 (\partial_2 \vec{F}_3 - \partial_3 \vec{F}_2) + e_2 (\partial_3 \vec{F}_1 - \partial_1 \vec{F}_3) + e_3 (\partial_1 \vec{F}_2 - \partial_2 \vec{F}_1)$$

$$= \begin{pmatrix} x - (-y) \\ x + e^{xz} + zxe^{xz} - [y + e^{xz} + xze^{xz}] \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$$

finire per esercizio

$$(x, y, u(x, y))$$

→

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\int_S \text{rot } F \cdot n = \int_D F(x, y, u(x, y)) \cdot \frac{\varphi_x \times \varphi_y}{|\varphi_x \times \varphi_y|} \cdot \frac{1}{|\varphi_x \times \varphi_y|} dx dy$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix} \right] dx dy = \boxed{\quad}$$

prodotto  
vettoriale

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}$$

$$\varphi_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}$$

Soluzione

finire x  
esercizio

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-u_x = -2x$$

$$-u_y = +2y$$

← è la normale giusta

$$\begin{aligned} \boxed{\quad} &= \int_D (x+y)(-2x) + (x-y)2y \, dx dy = -2 \int_D (x^2 + y^2) \, dx dy = -2(2\pi) \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ &= -4\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \\ &= -\pi \end{aligned}$$



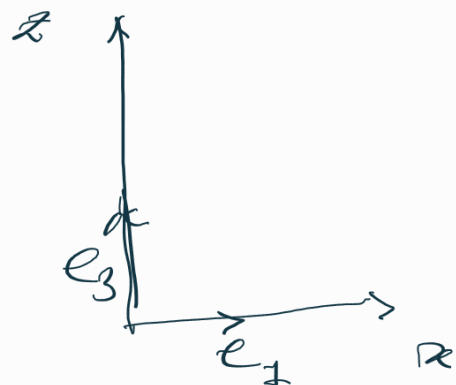
14 apr 2023

$$\gamma(t) = e_1 \cos t + e_3 \sin 2t$$

$$|t| \leq \frac{\pi}{2}$$

D regione limitata da  $\gamma$   
 $\cap$   
 $\text{span}\langle e_1, e_3 \rangle$

$V =$  solido ottenuto ruotando  
 $D$  attorno all'asse  $z$



$$\boxed{\text{Vol}(V) = ?}$$

① Studio di  $\gamma(t)$

$$\gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\gamma$  è chiusa

$\gamma$  è iniettiva

$$\cos t_1 = \cos t_2 \Rightarrow |t_1| = |t_2| \begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 = -t_2 \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 2 \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

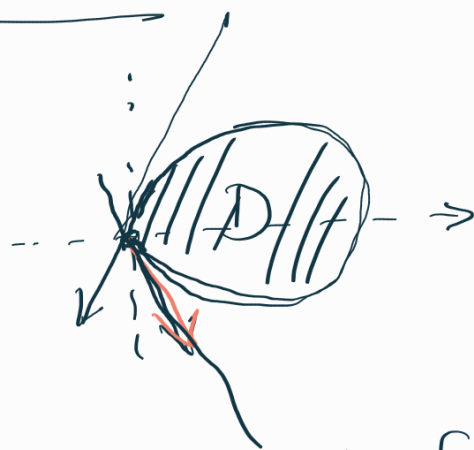
$$\sin t_1 = -\sin t_2$$

quindi  $\gamma$  anche  $\sin 2t_1 = \sin 2t_2 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\gamma'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

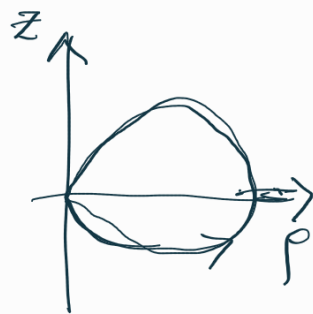
$$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_D e \, d\rho \, d\theta \, dz$$

$$\int_D \int e \, d\rho \, dz$$



$$F(\rho, z) = \begin{pmatrix} \rho^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iint_D \text{div} \vec{F} \, d\rho \, dz = \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)| \, dt = (*)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad n(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|}$$



$$(*) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 t}_{F_1(\gamma(t))} \cdot \underbrace{(2 \cos 2t)}_{n_1(\gamma(t)) \cdot \frac{1}{|\dot{\gamma}|}} \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \cos(2t) \, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t (\cos^2 t - \sin^2 t) \, dt$$



Exr: 1) finire il conto

2) cercare un altro campo con la stessa divergenza che conduce a un conto + semplice

$$\underline{Es}: \quad \omega(x,y) = \frac{1}{2} \overbrace{\log(x^2+y^2)}^A dx - \overbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}^B dy$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2+1}{2} \\ 2t^3-t \end{pmatrix} \quad t \in [-1, 1]$$

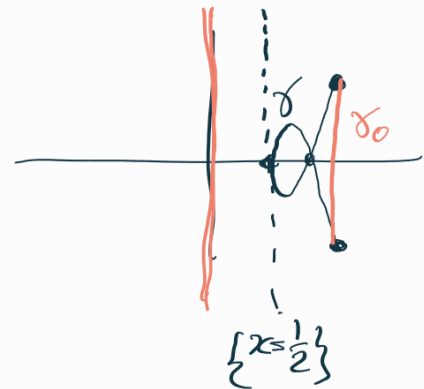
$$\int_{\gamma} \omega = ?$$

$$\text{Dom}(\omega) = \{x \neq 0\}$$

$$\gamma(-1) =$$

$$\partial_y A = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\partial_x B = - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}$$



$\omega = A dx + B dy$  è chiusa  $\Rightarrow \omega$  è esatta su  $\{x > 0\}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} \log(1+t^2) - \arctan t \right] dt$$

$$\gamma_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in (1, 1)$$

$$= - \int_{-1}^1 \arctan t \, dt = 0$$

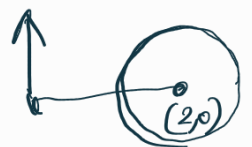
$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y z^2 \\ z + \sin x + y \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$T \leftrightarrow \begin{pmatrix} (2+\cos\varphi) \cos\theta \\ (2+\cos\varphi) \sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$   
 $\varphi \in [0, 2\pi] \uparrow$  in coord cilindriche

$$\int_T \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_V \text{div rot } \vec{F} \, dx dy dz \stackrel{=0}{=}$$

$$T = \partial V$$



Es: Riflettere sul fatto che lo stesso risultato poteva essere ottenuto col teorema di Stokes

$$\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$$

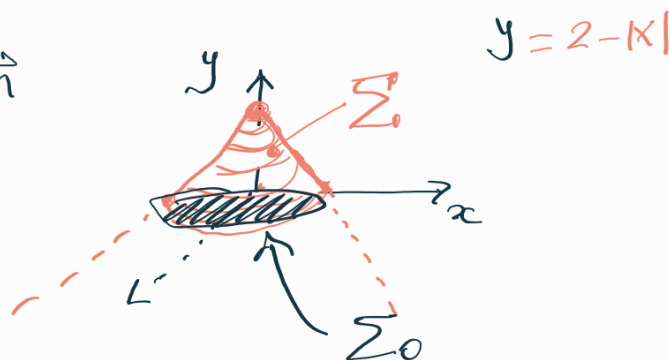
$$\Sigma = \{(x, y, z) : \boxed{y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}}\}_{y \geq 0}$$

$$F = \begin{pmatrix} y \sin(x + \cos z^4) - 3z \\ y^8 e^{x+z} \\ 3x + 5x^2 z \end{pmatrix}$$

V superficie bordata da  $\Sigma$  e  $\Sigma_0$

$$\int_V \text{div rot } F = \int_{\Sigma_0} \text{rot } F \cdot \vec{n} + \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n}$$

V // 0       $\Sigma_0 \uparrow$        $\Sigma \uparrow$



calcolo questo  $\vec{n} = (0, 1, 0)$

mi interessa la II<sup>a</sup> comp di  $\text{rot } F$

$$\text{rot } F = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \boxed{e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)} + e_3 (\dots)$$

$$\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 = y \cdot (*) - 3 - 3 - 10xz$$

area del disco di raggio 2

$$F(x, 0, z)$$

$$\int_{\Sigma_0} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{x^2 + z^2 \leq 4} (-6 - 10xz) dx dz = -6 \cdot (4 \cdot \pi) = -24\pi$$

Sia  $\omega = \frac{x dy - y dx}{(x+y)^2 + y^2}$

è chiusa?  
è esatta?

$$\left( \int_{\gamma} \omega \right)$$

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

● Verificare che  $\omega$  è chiusa

$$\text{Dom } \omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$\int \omega$  ↪ Per fare questo calcolo cerco una primitiva di  $\omega$

$$dU = \omega$$

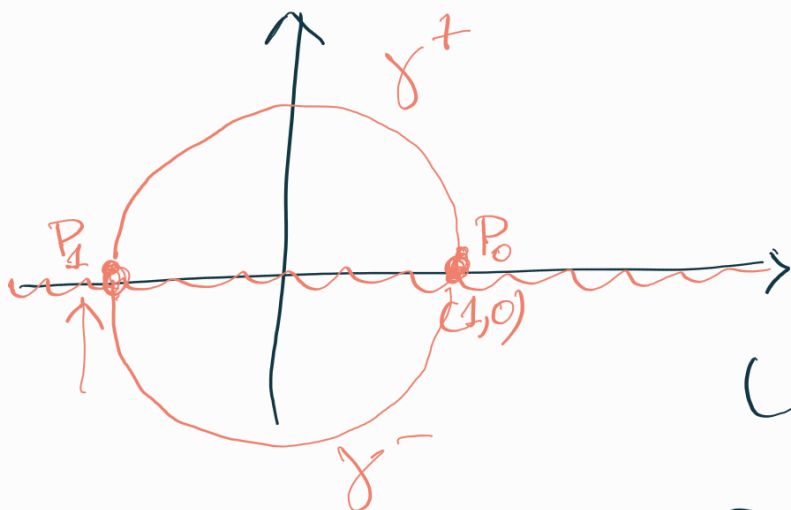
$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = - \frac{y}{(x+y)^2 + y^2}$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} dx = - \int \frac{y}{(x+y)^2 + y^2} dx \quad \boxed{x+y = z} \quad dz = dx$$

$$= - \int \frac{y}{z^2 + y^2} dz = - \arctan\left(\frac{z}{y}\right)$$

$$= - \arctan\left(\frac{x+y}{y}\right)$$

↪ definito su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\}$



$$U = -\arctan\left(\frac{x+y}{y}\right) + c(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{1}{1 + \frac{(x+y)^2}{y^2}} \cdot \frac{y - x - y}{y^2} + c'(y)$$

$$c' = 0 \Rightarrow c(y) = \text{cost}$$

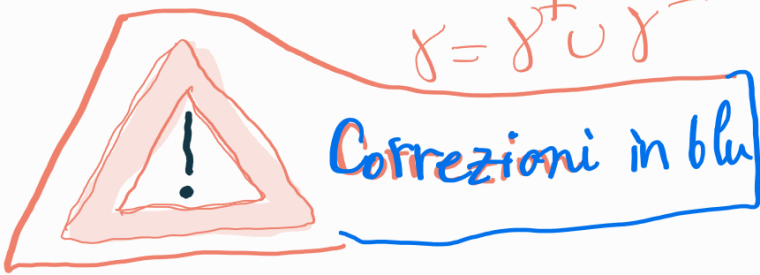
$$= \frac{x}{y^2 + (x+y)^2} + c'(y)$$

$U^+$  estensione per continuità di  $U$  a  $\{y \geq 0\}$

$$U^+(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y > 0, \\ -\pi/2 & y = 0, x > 0 \\ \pi/2 & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma^+} \omega + \int_{\gamma^-} \omega$$

$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$



Correzioni in blu

$$= \int_{\gamma^+} \omega = U^+(-1, 0) - U^+(1, 0) = +\pi$$

$$U^-(x, y) = \begin{cases} U(x, y) & y < 0 \\ \pi/2 & y = 0, x > 0 \\ -\pi/2 & y = 0, x < 0 \end{cases}$$

$$\int_{\gamma^-} \omega = U^-(-1, 0) - U^-(1, 0)$$

$$= \pi/2 - (-\pi/2) = \pi$$

$$\int_{\gamma} \omega = +\pi + \pi = 2\pi$$

$\Rightarrow \omega$  è esatta

NON

$$\omega(x,y) = \frac{x dx + y dy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$\int \omega$  con  $\gamma(t) = (t, \sin t)$   
 $t \in [\pi, 2\pi]$

~~$\omega$~~   $\omega = dV$  con  $V$  radiale

$$V(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

$$dV = \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2x dx + \varphi'(x^2 + y^2) \cdot 2y dy$$

$$\varphi'(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2t}$$

$$V(x,y) = -\frac{1}{2(x^2 + y^2)}$$





20 apr 2023

$F(x, y)$

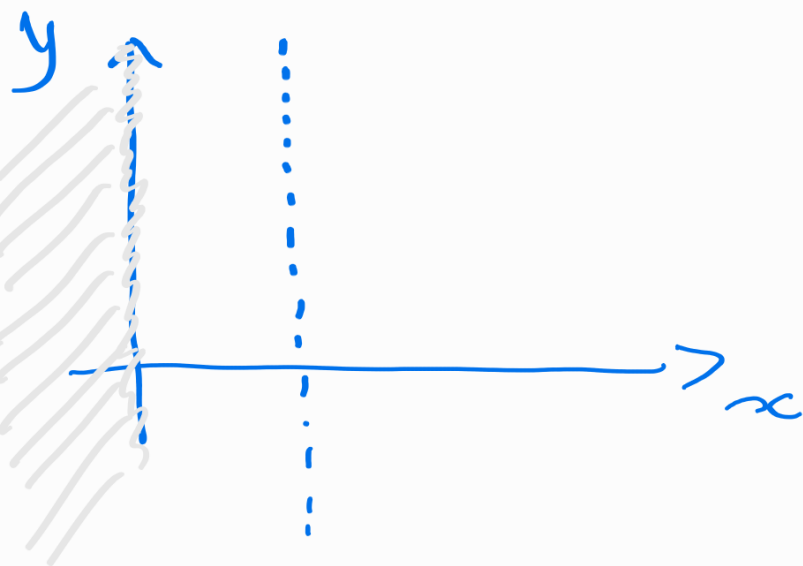
$y = y(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \arctan y - \frac{1}{x} \\ y(1) = b \end{array} \right.$$

$x > 0$

$$y(1) = b$$

$(b \in \mathbb{R})$



- exist. & unicità
- int. amon. di def.
- $\exists! b^*$  t.c.  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$
- dire se ci sono asintoti obliqui

LIP. (LOCALE) in  $y$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq C |y_1 - y_2|$$

$$|\arctan y_1 - \arctan y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

$\Rightarrow$  Sono verificate le ipotesi del  
teorema di Cauchy-Lip

—————  $\circ$  —————

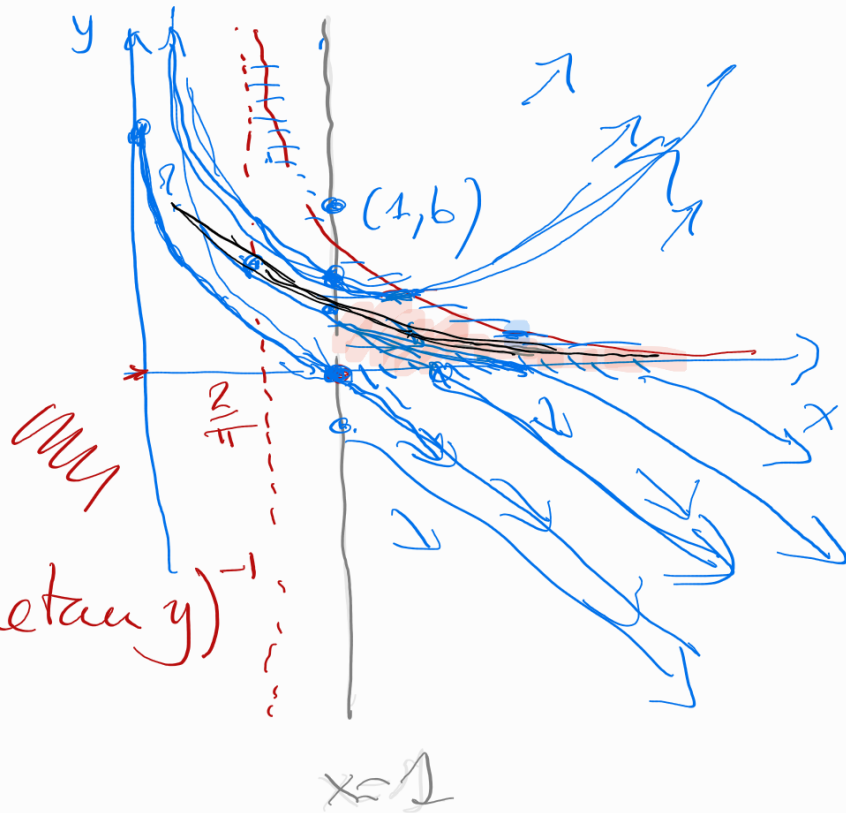
$$F(x, y) \leq A(x) + B(x) |y|$$

allora c'è exist. globale  
su  $\{x > 0\}$

$A, B$   
continue in  $x$



$$\begin{cases} y' = \arctan y - \frac{1}{x} \\ y(1) = b \end{cases}$$



$$F(x, y) > 0 \quad ?$$

$$F(x, y) = 0 \quad ?$$

$$\arctan y > \frac{1}{x}$$

$$\uparrow y > 0$$

$$x > (\arctan y)^{-1}$$

Caso  $b \leq 0$ . La soluzione sempre  
decresciente (es. cosa succede per  
 $x \rightarrow 0$ ?)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \ell \Rightarrow \ell = -\infty$$

Per assurdo: se  $\ell \in (-\infty, 0)$  allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = \arctan \ell < 0$$

non è compatibile con  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$$y(n+1) - y(n) = y'(\xi) \cdot 1 \quad \xi \in (n, n+1)$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$0 = l - l$$



$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} y'(\xi) = \arctan 1$$

$\uparrow$  arctan 1



$\{b, y_b(x) \text{ attore verso la curva } F(x, y) = 0\}$

è un intervallo  $(b^*, +\infty)$

$$\bar{y}(x) = \lim_{b \rightarrow b^*} y_b(x) \quad \text{il limite esiste} \\ \forall x \text{ fissato}$$

Sui compatti di  $(0, +\infty)$  la  
convergenza è uniforme.

(Perché c'è convergenza monotona  
su un intervallo compatto)  
e dal th di dip. continua dai dati iniz.

$$y_b(x) = b + \int_1^x y'_b(t) dt$$

$$= b + \int_1^x F(t, y_b(t)) dt$$

$b \rightarrow b^*$  ottengo che  $(x \rightarrow \infty)$

$$\bar{y}(x) = b^* + \int_1^x F(t, \bar{y}(t)) dt$$

$$\Rightarrow \bar{y} = y_{b^*}$$

$$\bullet \bar{y} > 0$$

$$\bullet \arctan \bar{y}(x) < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{y}(x) = 0$$

— 0 —

$$(y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x))' = \arctan y_{b_1}(x) - \arctan y_{b_2}(x)$$

$$= \frac{1}{1 + \xi^2} (y_{b_1}(x) - y_{b_2}(x))$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow \infty} y_b(x) = 0$$

con  $b \leq b^*$

$$\xi \in [y_{b_2}(x), y_{b_1}(x)]$$

$$\left( y_{b^*}(x) - y_b(x) \right)' \geq \frac{1}{2} (y_{b^*} - y_b) \quad \forall x \geq x_0$$

$\nwarrow$   
 $w(t)$

$b < b^*$

$$w' \geq \frac{1}{2} w \quad \forall x \geq x_0$$

$$w(x) \geq w(x_0) e^{\frac{x-x_0}{2}} \longrightarrow +\infty$$

— o —

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$$

Esiste asintoto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \arctan M - \frac{1}{x} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

Se  $y(x)$  ha un asintoto

$$\text{Sse } y(x) + \frac{\pi}{2} x \longrightarrow c \in \mathbb{R} \quad x \rightarrow +\infty$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 $h(x)$

$$h'(x) = y'(x) + \frac{\pi}{2} =$$

$$= \arctan y + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}$$

$$= -\arctan \frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}$$

$$y(x) \rightarrow -\infty$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y < 0 \\ \arctan y + \arctan \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

Se  $y(x)$  asintótico a  $-\frac{\pi}{2}x + C$

$$y(x) \sim -\frac{\pi}{2}x \quad x \rightarrow \infty$$

$$\arctan \frac{1}{y(x)} \sim -\frac{2}{\pi}x$$

$$h'(x) \sim \frac{1}{x} \left( -1 + \frac{2}{\pi} \right)$$

↑  
negative

$$h(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^x h'(t) dt$$

$h$  non può essere limitata  
perché

$$\int_{x_0}^{+\infty} h'(x) \text{ non è convergente}$$

Per vedere che non c'è ~~limito~~  
asintoto a  $+\infty$  si ripete  
lo stesso ragionamento

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}$$

$f, g$  funzioni  $C^0$



questa equazione si dice  
ESATTA se

$\omega = g dx - f dy$  è  
una forma esatta

$$\omega = dU$$

Prop: Se l'equazione è esatta

(allora  $\exists U \in C^1$  tale che  $g(x,y) = U_x(x,y)$   
 $f(x,y) = -U_y(x,y)$ )

$$U(x(t), y(t)) \equiv \text{cost}$$

$$\frac{d}{dt} (U(x(t), y(t))) = U_x(x,y) \cdot x' + U_y(x,y) y'$$

$$= g(x,y) x' - f(x,y) y'$$

$$= g(x,y) f(x,y) - f(x,y) g(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} x' = \overbrace{Ax + By}^f \\ y' = \underbrace{Cx + Dy}_g \end{cases} \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad}$$

Per quali

~~A~~, ~~B~~, ~~C~~, ~~D~~

il sistema  
è esatto?

$$f(x,y) = \cancel{A}x + \cancel{B}y$$

$$g(x,y) = \cancel{C}x + \cancel{D}y$$

$$g dx - f dy = dU$$

è esatto  $\Rightarrow$  chiuso

$$\partial_y g = \partial_x (-f)$$

$$\cancel{D} = -\cancel{A} \iff A + \cancel{D} = 0$$

$$\begin{cases} x' = Ax + By \\ y' = cx - Ay \end{cases}$$

$$dU = (cx - Ay)dx - (Ax + By)dy$$

$$U(x, y) = \frac{c}{2}x^2 - Axy - \frac{B}{2}y^2$$

Es.  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases} \quad (*)$

① verificare che tutte le sol  
sono limitate

②  $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

determinare il  
punto più vicino  
e quello più lontano  
dall'origine



Es 2: Ridurre la soluz.  
di (\*) alla  
soluz di un'eq scalare  
del second'ordine

Es 3. E' sempre possibile  
riconducere la soluz. di  
un sistema lin a coeff  
cost di dim  $n$   
alle sol di una  
eq. scalare di  
ordine  $n$  ?

2 mag. 2023

Caricare lez. \_

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

(\*)

$$\boxed{x(t), y(t)}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Prop: le due comp  $(x(t), y(t))$  della sol di (\*) soddisfanno l'eq diff del  $2^o$  ordine

$$u'' - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tr } M}}{(a+d)} u' + \underset{\substack{\uparrow \\ \det(M)}}{(ad-bc)} u = 0$$

Dim:  $x'' = ax' + by' = ax' + bcx + dy$

$$= ax' + bcx + dx' - dax$$

$$by = x' - ax$$

$$x'' = (a+d)x' - (ad-bc)x$$

$$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = 0$$

per l'altra comp. il conto è identico.

## Es. di applicazione

$$\star \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = 0$$

(I) dire se le sol  
sono tutte  
limitate

(II) determ. sup & inf  
della distanza  
della sol  
dall'origine

$x(t)$  e  $y(t)$  sono soluzioni

dell'eq  $u'' - \text{tr}(M)u' + \det(M)u = 0$

$$u'' + 4u = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(M) = 0$$

$$\det M = 4$$

$$x(t) = \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t$$

$$y(t) = \gamma \cos 2t + \delta \sin 2t$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = ?$$

$$x(0) = 1 \Rightarrow \alpha \cos 0 + \beta \sin 0 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$x'(0) = x(0) - y(0) = 1$$

$$x'(t) = -2\alpha \sin 2t + 2\beta \cos 2t$$

$$x'(0) = 1 \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$y(0) = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$y'(0) = 5x(0) - y(0) = 5$$

$$\delta = 5/2$$

$$y(t) = \frac{5}{2} \sin(2t)$$

Usare le espressioni trovate  
per determinare max & min di  
 $R(t) = x(t)^2 + y(t)^2$

— o —

Dato che la matrice  $M$  è della forma  
(traccia nulla)

il sistema  $\textcircled{A}$  è esatto e  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$

quindi la funzione  $U(x, y) = \frac{C}{2} x^2 - Axy - \frac{B}{2} y^2$   
è costante sulle orbite

$$U(x, y) = \frac{5}{2} x^2 - xy + \frac{1}{2} y^2$$

L'orbita in questione

$$\left\{ \frac{5}{2} x^2 - xy + \frac{1}{2} y^2 = \frac{5}{2} \right\} \quad \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = \text{cost} \end{cases}$$

↑  
vincolo

È l'eq. di un'ellisse e il punto

di massima/minima distanza si trova  
col mult. di Lagrange  $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(5x - y) \\ 2y = \lambda(-x + y) \\ 5/2 x^2 - xy + 1/2 y^2 = 5/2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

←

$\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$  è autovettore di  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

e sol  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sono gli autovettori relativi

finire il calcolo per esercizio



### SISTEMI AUTONOMI

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$u' = F(u) \quad (*)$  sistema autonomo

Sia  $u: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$  è sol. maximale di  $(*)$

$\{u(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$  si dice traiettoria di  $(*)$

(una traiettoria ha in maniera naturale anche un'orientazione)

Oss 1: Se  $u$  è sol di (1) } anche  
e  $c \in \mathbb{R}$

$v(t) = u(t - c)$  è sol di (1)

(basta derivare)

Oss 2: Se  $u$  e  $\tilde{u}$  sono sol di  $(*)$   
e  $u(t_0) = \tilde{u}(t_1)$  allora  
 $\tilde{u}(t) = u(t + t_0 - t_1)$

Dim: Basta vedere che  $\tilde{u}$  e

$v(t) = u(t + t_0 - t_1)$  sono due soluzioni dello stesso prob. di Cauchy infatti sono entrambe sol (\*) e

$$v(t_1) = u(t_1 + t_0 - t_1) = u(t_0) = \tilde{u}(t_1)$$

$$\Rightarrow v \equiv \tilde{u}$$

COR: Se  $u$  è una sol non costante di (\*) t.c.  $u(t_0) = u(t_1) \Rightarrow$   
 $u$  è periodica con periodo  $T \neq 0$

Dim: Per l'osservazione sopra  
 $u(t) = u(t + t_0 - t_1) \quad \forall t$

( $\Rightarrow u$  è definita su  $\mathbb{R}$ )

Possiamo considerare

$$t_0 - t_1 \in \mathcal{P} = \{p \text{ t.c. } u(t) = u(t+p) \forall t\} \neq \emptyset$$

$\mathcal{P}$  è chiuso

$\mathcal{P}$  è un gruppo additivo

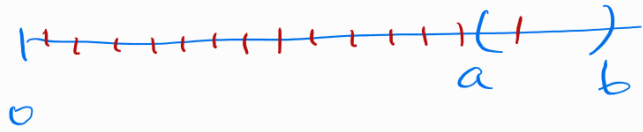
Quindi  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap [0, +\infty)$  si ha che

$$\circ \inf \mathcal{P}^+ = 0 \Rightarrow \mathcal{P} = \mathbb{R} \quad (\text{non può succedere})$$

$$\circ \inf \mathcal{P}^+ = \min \mathcal{P}^+ = P_0 > 0 \Rightarrow P_0 \text{ è il periodo di } u$$

$$e \quad t_0 - t_1 = k p_0 \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$  Se  $\inf p^+ = 0$  allora  $\mathcal{P}$  è denso  
perché



Esiste  $p \in \mathcal{P}$  t.c.  $0 < p < \frac{b-a}{2}$

$\Rightarrow \exists k$  t.c.  $k p \in (a, b)$

COR: (B) Ogni orbita corrisponde a una famiglia di traslate di una stessa soluzione

(b) due orbite si intersecano  
se coincidono (cioè se sono la stessa orbita)

$\Omega$  è foliato da orbite  
(cioè è un' unione disgiunta di orbite)

$$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

$$\lambda \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_+) \quad \underline{\lambda > 0}$$

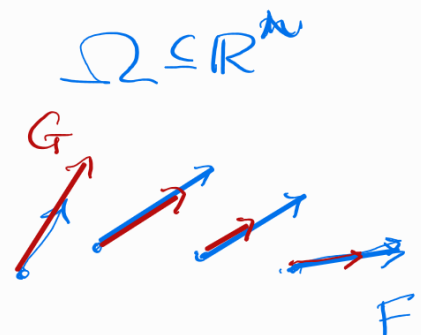
$$G(x) = \lambda(x) F(x)$$

$$u' = F(u)$$

(SF)

$$v' = G(v)$$

(SG)





Prop: I due sistemi hanno le medesime traiettorie

Dim: Mostro che se  $v$  è sol di (SG)

allora ~~posto~~  $u(t) \doteq v(\psi(t))$

con  $\psi = \varphi^{-1}$  e  $\varphi(t) \doteq \int_{t_0}^t \lambda(v(s)) ds$

si ha che  $u$  soddisfa  $(SF)$  con  $u(0) = v(t_0)$

$$u'(t) = \frac{d}{dt} [v(\psi(t))] = \underbrace{v'(\psi(t))}_{\lambda(v(\psi(t)))} \psi'(t)$$

$$= \overbrace{\lambda(v(\psi(t))) F(v(\psi(t)))}^{\lambda(v(\psi(t)))} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

$$= \cancel{\lambda(v(\psi(t)))} F(v(\psi(t))) \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda(v(\psi(t)))}}$$

$$u'(t) = F(u(t))$$

————— 0 —————

Derivata di una funzione lungo una  
traiettoria



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \quad u' = F(u)$$

$$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

$$E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$$

Definisco la derivata di  $E$  lungo le traiettorie del campo  $F$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (E(u(t))) &= \nabla E(u(t)) \cdot u'(t) \\ &= \nabla E(u(t)) \cdot F(u(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{E}(x) \doteq \vec{\nabla} E(x) \cdot \vec{F}(x)$$

← derivata di  $E$  lungo le linee di flusso di  $F$

Def:  $E$  è un integrale del moto (per  $F$ )  
se  $\dot{E} \equiv 0$

Es1  $\ddot{x} = -\nabla U \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \gamma \\ \gamma' = -\nabla U(x) \end{cases}$

$$E(x, \gamma) = \frac{|\gamma|^2}{2} + U(x)$$

$$U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, \gamma) = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\nabla U(x) \end{pmatrix}$$

$$F: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$$\nabla_{(x, \gamma)} E \cdot F = \nabla U(x) \cdot \gamma + \gamma \cdot (-\nabla U(x)) = 0$$

## Es2: Sistemi Hamiltoniani

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \quad H \in C^1$$

$$\begin{cases} p'_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases}$$



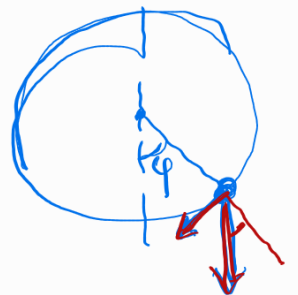
Se un sistema ha la forma  
allora  $H$  risulta essere un integrale primo

$$\begin{aligned} \dot{H}(p, q) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \cdot \left( - \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &= 0 \end{aligned}$$

↑ generalizzazione di Es1  
" dei sistemi esatte

Esempio di applic. (esercizio)

$$\ddot{\varphi} = -k \sin \varphi$$



$$\varphi = q$$

$$\dot{\varphi} = p$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -k \sin q \end{cases} \quad (S)$$

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + k(1 - \cos q)$$

verificare che  $\vec{H}$  è un' integrale primo  
per  $S$ ; descrivere le curve di livello  
di  $H$  (che corrispondono alle  
traiettorie di  $(S)$ )

9 mag 2023

STABILITÀ

$$\varphi'' = -k \sin \varphi - \varepsilon \varphi' \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

$$p = \varphi'$$

$$q = \varphi$$

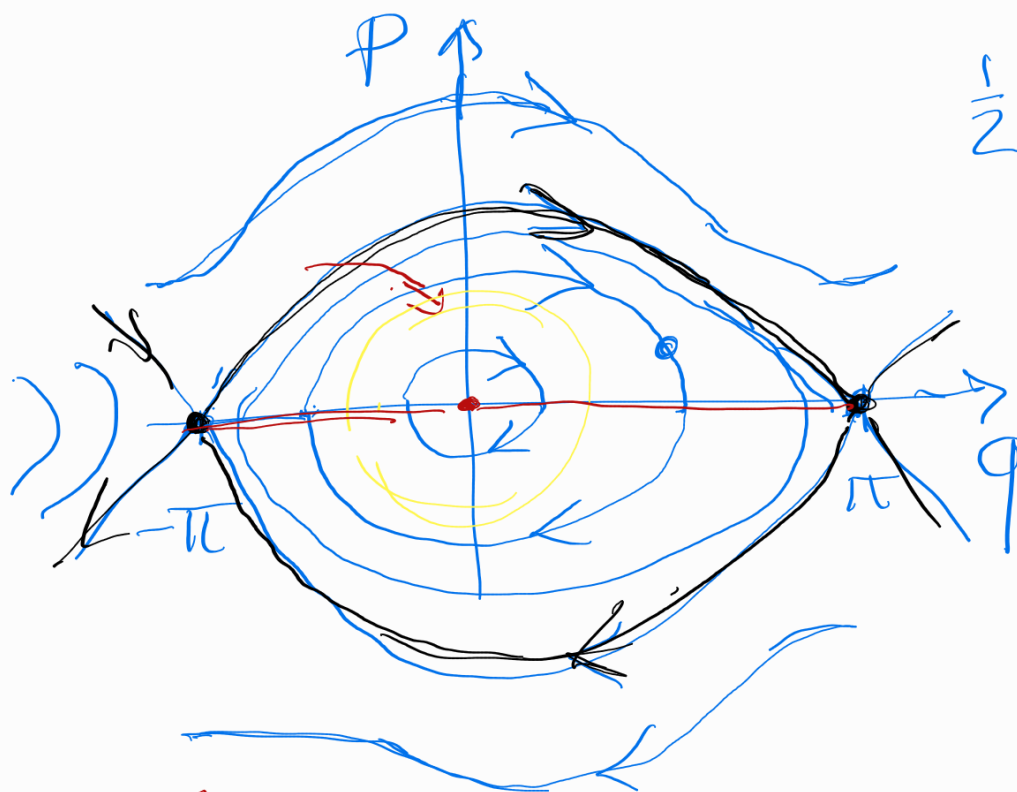
$$\begin{cases} p' = -k \sin q - \varepsilon p \\ q' = p \end{cases}$$

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + k(1 - \cos q)$$

$$\begin{cases} p' = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ q' = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

$\Rightarrow H$  è costante sulle traiettorie

$$H(p(t), q(t)) \equiv H_0$$



$$\frac{1}{2} p^2 = H_0 - k(1 - \cos q)$$

$$p = \pm \sqrt{2(H_0 - k + k \cos q)}$$

$$H_0 > 2k$$

$$H_0 = 2k$$

$$p = \pm \sqrt{2k(1 + \cos q)}$$

$$0 < H_0 < 2k$$

$$\boxed{\varepsilon = 0}$$

$$\boxed{0 = H_0}$$

Se  $\varepsilon > 0$

il sistema non è più Hamiltoniano

$$\dot{H} = 0$$

Ma si ha che

$$\dot{H}(p, q) = -\varepsilon p^2 < 0$$

$H$  è una funzione di Lyapunov per  
il sistema perturbato  
con  $\varepsilon > 0$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$(S) \begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$$

la sol. di (S)  
la chiamo  $\varphi_{\xi}(t)$

Def:  $\xi_0$  è punto di equilibrio  $F(\xi_0) = 0$

$\xi_0$  è pto di equ. STABILE

Se  $\forall R > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall \xi \in B_{\varepsilon}(\xi_0) \forall t > 0$

$$|\varphi_{\xi}(t) - \xi_0| < R$$

oss: se  $\xi_0$  è pto. equilibrio stabile  
 $\varphi_{\xi}(t)$  è definita su  $[0, +\infty)$

Def:  $\xi_0$  è <sup>equilibrio</sup> asintoticamente stabile

se  $\xi_0$  è stabile e  $\exists R > 0$  t.c.

$$\forall \xi \in B_R(\xi_0) \quad \varphi_\xi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \xi_0$$

Def:  $\xi_0$  è equilibrio INSTABILE se non è stabile

Es: verificare che il <sup>per il</sup> sistema del pendolo  
con attrito ( $\varepsilon > 0$ ),  $\xi_0$  è asintoticamente stabile



Def: Dico che  $\varphi_{\xi_0}$  soluzione di (S)  
è stabile  $\xLeftrightarrow[\text{def}]$

$\forall R > 0 \quad \exists r > 0, \forall \xi \in B_r(\xi_0)$   
 $\varphi_\xi(t)$  è definita  $\forall t$  e

$$|\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| < R \quad \forall t > 0$$

$\varphi_{\xi_0}$  è asintoticam. stabile  $\xLeftrightarrow[\text{def}]$

$\varphi_{\xi_0}$  è stabile e  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| = 0$

$$\boxed{\exists \eta > 0 : \forall \xi \in B_\eta(\xi_0) \text{ si ha}}$$

Oss: le traiettorie periodiche non costanti del pendolo senza attrito non sono stabili (nel senso della def. data sopra)

Def: Sia  $\xi_0$  equilibrio asintoticamente stabile

$$\Omega_{\xi_0} \doteq \{ \xi \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t) = \xi_0 \}$$

↑ BACINO DI ATTRAZIONE di  $\xi_0$

oss(0)  $\Omega_{\xi_0}$  è intorno di  $\xi_0$  (non vuoto) (asint. stab.  $\Downarrow \exists \eta > 0$ )  
 $\Omega_{\xi_0} \supset B_\eta(\xi_0)$

oss(1)  $\Omega_{\xi_0}$  è aperto

Dim(oss1):  $\xi_1 \in \Omega_{\xi_0}$   $\varphi_{\xi_1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \xi_0$

$$\Rightarrow \exists t_0 : \varphi_{\xi_1}(t_0) \in B_\eta(\xi_0)$$

$$\phi(x) := \varphi_x(t_0)$$

$\phi$  è continua (dip. cont. e univ.)

$$\xi_1 \in \Phi^{-1}(B_r(\xi_0))$$

↖ aperto

$$\Phi^{-1}(B_r(\xi_0)) \subseteq \Omega_{\xi_0}$$

$\psi$   
 $\xi$

$$\varphi_{\xi}(t) = \varphi_{\xi(t_0)}(t - t_0)$$

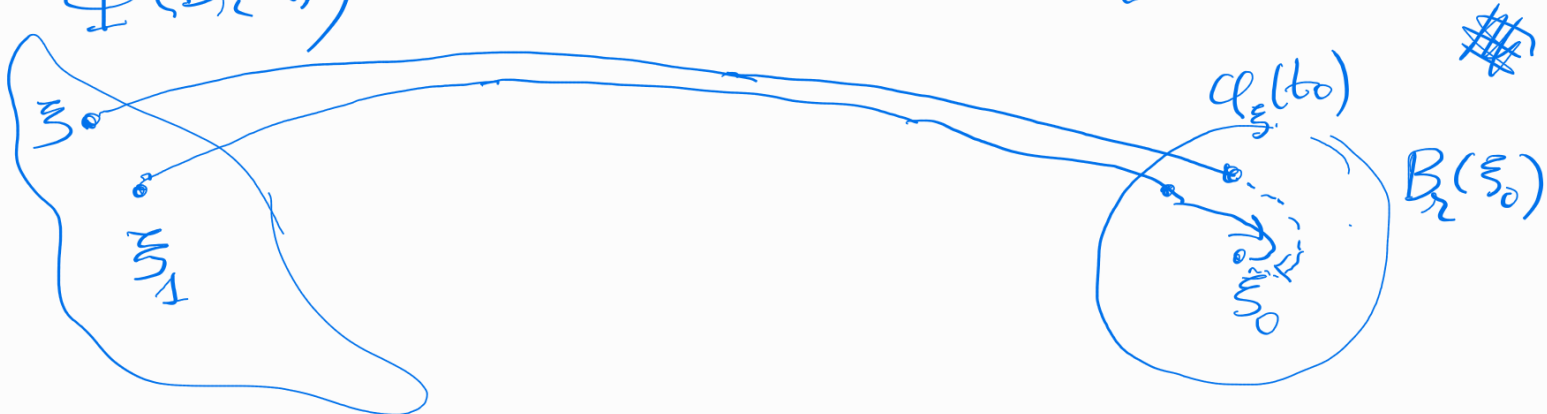


entrambe le funzioni  
sono soluzioni di  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(t_0) = \varphi_{\xi}(t_0) \end{cases}$   
con dato iniziale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\xi(t_0)}(t - t_0) = \xi_0$$

$$\Phi^{-1}(B_r(\xi_0))$$

$$\varphi_{\xi}(t_0) \in B_r(\xi_0)$$





Nello stesso setting di sopra  $\Omega$  aperto  
 $\xi_0 \in \Omega$   $F(\xi_0) = 0$   $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$   
 (S)  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$

Def:  $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  è funz. di LYAPUNOV

per (S) se

$$(i) \quad V(\xi_0) = 0; \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

$$(ii) \quad \dot{V}(x) \left( \stackrel{\cdot}{=} \nabla V(x) \cdot F(x) \right) \leq 0$$

—————  $\hookrightarrow$  —————

Prop: Se  $\xi_0$  equilibrio ammette  
 una funzione di LYAPUNOV  
 allora è stabile.

Inoltre se  $\xi_0$  soddisfa

$$(ii') \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

allora  $\xi_0$  è asintoticamente  
 stabile

---

Dim: S.P.G.  $\xi_0 = 0$

$$R > 0$$

$$B_R(0) \subset \Sigma$$

$$m = \min_{|x|=R} V(x) = V(x_0) > 0$$

$$x_0 \in R$$

fisso  $\varepsilon$  t.c.

$$0 < \varepsilon < m$$

$$\exists r > 0 : B_r(0) \subset \{x : V(x) < \varepsilon\}$$

fisso

$$\xi \in B_r(0)$$

$$\psi(t) := V(\varphi_\xi(t))$$

$$\psi'(t) = \nabla V(\varphi_\xi(t)) \cdot \varphi_\xi'(t) = \nabla V \cdot F = \dot{V}(\varphi_\xi(t)) \leq 0$$

$\psi$  è deb. decrescente

$$\psi(t) < \varepsilon \quad \forall t \Rightarrow$$

$$\varphi_\xi(t) \subset \{x : V(x) < \varepsilon\}$$

$\varphi_\xi(t)$  non attraversa mai  
 $\{|x| = R\}$

Stab. asintotica  
 $(\dot{V} < 0)$

$$\text{scelgo } \xi \in B_r(0) \subseteq \Sigma$$

~~Stabilità~~  
 Stabilità

Definisco  $\psi(t)$  come sopra  $\psi(t) = V(\varphi_{\xi}(t))$

$$\psi' < 0$$

$$c_0 = \inf_{t \geq 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)$$

(A)  $c_0$  non può essere  $> 0$

(B) Se  $c_0 = 0 \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

$$\text{Se } c_0 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$$

$$\text{t.c. } B_{\delta}(0) \subset \{V < c_0\}$$

aperto  
contenente l'origine

$$\varphi_{\xi}(t) > c_0 \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \notin B_{\delta}(0)$$

$$\sigma := \max_{\delta \leq |x| \leq r} \dot{V}(x) < 0$$

per (i)

$$\psi'(t) = \dot{V}(\varphi_{\xi}(t)) < \sigma$$

$$\psi(t) \leq \psi(0) + \sigma t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$$

← contraddizione

$$\psi(t) \geq c_0 \quad \forall t \geq 0$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists c_\delta > 0 \text{ t.c.}$$

~~(A)~~

$$\delta \leq |x| \leq R \Rightarrow V(x) \geq c_\delta$$

$$\psi(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_\xi(t) \in B_\delta(0)$$

$$\forall t \geq t_0$$

~~(B)~~

PROP:  $\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases} \quad F(\xi_0) = 0$

$$\text{se } \exists W \in C^1(\Omega) \text{ t.c.}$$

$$(W1) \quad W(\xi_0) = 0 \quad \& \quad \xi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_0 \\ W(\xi_k) > 0$$

$$(W2) \quad W(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

Allora  $\xi_0$  è in stabile.

Dim: S.P.G.  $\xi_0 = 0$

Sia  $R > 0$  fissato, mostro che

$\forall k \in \mathbb{N}$   $\varphi_{\xi_k}(t)$  esce da  $B_R(0)$  per qualche  $t > 0$

$\dot{W} > 0$   
 $W(\varphi_{\xi_k}(t))$  è crescente in  $t$

$$W(0) = \infty \Rightarrow \exists \delta > 0 : W(x) < W(\xi_k) \\ \forall x \in B_\delta(0)$$

$$\varphi_{\xi_k}(t) \notin B_\delta(0)$$

$$\text{min}_{\delta \leq |x| \leq R} \dot{W}(x) = \delta > 0$$

$$W(\varphi_{\xi_k}(t)) \geq W(\xi_k) + \delta t$$

↑  
fintanto che  
 $\varphi_{\xi_k}(t) \in B_R(0)$

$\Rightarrow$  non ci sta per sempre  
perché  $W$  ammette massimo su  
 $B_R(0)$

~~##~~

Es: Sia  $u' = Au$  ~~\*~~  
(A invertibile) con  $A \in M(n \times n)$

$0$  è un eq. stabile  $\Leftrightarrow$  

$0$  è asintoticamente stabile  $\Leftrightarrow$  

Teor:  $u' = F(u)$

$F \in C^1$

$F(\xi_0) = 0$

$DF(\xi_0) = A$

$\lambda_i$  aut. di  $A$

(1) Se  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$   
 $\Rightarrow 0$  è eq. asint.  
stab.

(2) Se  $\exists i_0$  t.c.

$\operatorname{Re}(\lambda_{i_0}) > 0 \Rightarrow 0$  è instab.

10 mag 2023

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$$

$$F(\xi_0)$$

$$\uparrow \varphi(t)$$

$\xi$

STABILITÀ se  $\exists V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  l.c.

$$(i) \quad V(\xi_0) = 0 \quad ; \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

$$(ii) \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \quad \dot{V}(x) \doteq DV(x) \cdot F(x)$$

Allora  $\xi_0$  è stabile

se inoltre vale

$$(ii)' \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

Allora  $\xi_0$  è asintoticamente stabile

INSTABILITÀ se  $\exists W \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  l.c.

$$(i) \quad W(\xi_0) = 0 \quad , \quad \exists \xi_k \rightarrow \xi_0 \quad W(\xi_k) > 0$$

$$(ii) \quad \dot{W} > 0 \quad \forall x \neq \xi_0$$

Allora  $\xi_0$  non è stabile.

## TEOR di LINEARIZZAZIONE

$$u' = F(u)$$

$$F(\xi_0) = 0$$

$$DF(\xi_0) \doteq A$$

e  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  autovalori di  $A$

Allora

(1) se  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow \xi_0$  è  
asintoticamente stabile

(2) se  $\exists \lambda_k: \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0 \Rightarrow$   
 $\xi_0$  non è stabile

---

Esempio: asintotica stabilità di  $\underline{0}$   
per il pendolo rigido con attrito

$$(S_\varepsilon) \begin{cases} \phi' = -\sin q - \varepsilon p \\ q' = p \end{cases} \quad 0 < \varepsilon$$

$$V(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + (1 - \cos q)$$

$$\dot{V}(p, q) = -\varepsilon p^2$$

è funzione  
di Lyapunov  
per  $S_\varepsilon$   
se  $\varepsilon > 0$



$$F(p, q) = \begin{pmatrix} -\sin q - \varepsilon p \\ p \end{pmatrix}$$

$$DF(p, q) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -\cos q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DF(0, 0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} -\varepsilon - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon + \lambda)\lambda + 1 \\ = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$$

$$(\varepsilon = 0 \quad \lambda = \pm i)$$

$$0 < \varepsilon < 2$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2}$$



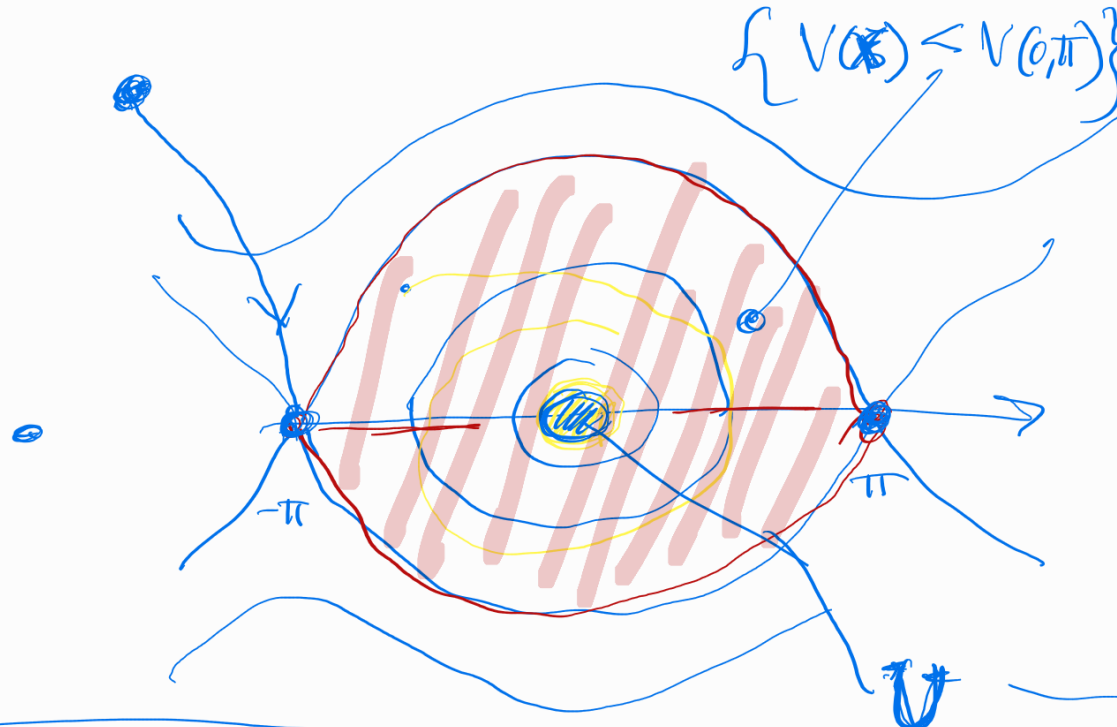
$$\operatorname{Re}(\lambda_{\pm}) = -\frac{\varepsilon}{2}$$



0 è asintoticamente stabile

$\lambda_{\pm} = -1 \pm i\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$   
 $\varepsilon = 2$   
 $\varepsilon > 0$

Chi è il  
Bacino di  
attrazione  
di 0



POINCARÉ BENDIXSON

$K$  compatto invariante

$$K \cap \{F=0\} = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \xi \in K \\ \varphi_t(\xi) \in K \\ \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow K$  contiene un'orbita periodica

- $\{P=0\}$  non può contenere orbite del sistema (a parte le costanti)
- un'orbita periodica non può entrare nella regione  $\{P \neq 0\}$

$$\xi \in \{V(x) < V(0, \pi)\} = E$$

$$\left\{ \varphi_{\xi}(t) : t \geq 0 \right\} = K$$

$K$  è compatto (chiuso e limitato)

$K$  è invariante (dip. continua dai dati iniziali)

$$\xi_n = \varphi_{\xi}(t_n) \longrightarrow \bar{\xi} \quad t_n \longrightarrow \infty$$

$$t > 0 \text{ fissato} \quad \varphi_{\bar{\xi}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\bar{\xi}}(t + t_n) \downarrow \in K$$

$\in K$

$$\Rightarrow \varphi_{\bar{\xi}}(t) \in K$$

~~\*~~ invarianza

alternativa:



$$\bullet \in K \Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \text{ entra in } U$$

$$\Rightarrow \varphi_{\xi}(t) \longrightarrow 0$$

~~$0 \notin K$~~   $\Rightarrow \exists$  orbita periodica in  $K$  ( $\Rightarrow$  assurdo!)

Dim (TAM LINEARIZZAZIONE) S.P.G.  $\xi_0 \neq 0$   
 [1] Suppongo  $A$  abbia  $n$  autovalori reali

$$u' = F(u)$$

$$F(x) = A \cdot x + R(x)$$

$B$  matr invertibile

$$\text{con } R(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$$

$$BAB^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = J \quad (\lambda_i < 0)$$

$$x(t) \doteq Bu(t)$$

$$u \text{ soluz} \Leftrightarrow \dots$$

$$x' = Bu' = BAu = \underbrace{BAB^{-1}}_{+BR(u)} Bu = \underbrace{BAB^{-1}Bu}_{+BR(B^{-1}x)} = Jx + \tilde{R}(x)$$

$$\text{con } \tilde{R}(x) = BR(B^{-1}u)$$

$$x' = Jx + \tilde{R}(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$$

0 è stabile perché  $V(x) = \frac{1}{2} |x|^2$  è una funz. di Lyapunov per il sistema

$$V(0) = 0 \quad ; \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\boxed{\dot{V} < 0 \quad (\text{in un intorno di } 0) \quad \text{bucato}}$$

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot x = (Jx + \tilde{R}(x)) \cdot x$$

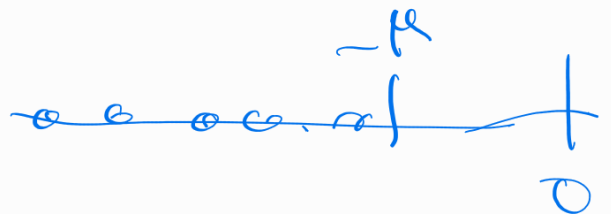
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \tilde{R}(x) \cdot x$$

$$\leq -\mu |x|^2 + o(|x|^2)$$

$$\leq |x|^2 (-\mu + o(1)) \quad \text{con } \mu = \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

in un opportuno  
intorno  
di 0

$$\rightarrow \frac{1}{2} \leq -\mu |x|^2$$



$\Rightarrow$  stab. asintotica

Traccia di come si tratta il caso  
A un Blocco di Jordan reale

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$e_1 \dots e_n$$

$$(A - \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda)e_1 = 0$$

$$e'_j = \varepsilon^j e_j$$

$$(A - \lambda)e'_j = \varepsilon^j (A - \lambda)e_j = \varepsilon^j e_{j-1} = \varepsilon e'_{j-1}$$

$(j \geq 2)$

nella base

$e'_1 \dots e'_n$  il blocco di Jordan ha la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

prendendo  $\varepsilon < |\lambda|$

si dimostra che  $\frac{1}{2} \|x\|^2$  è funz.

di Lyapunov

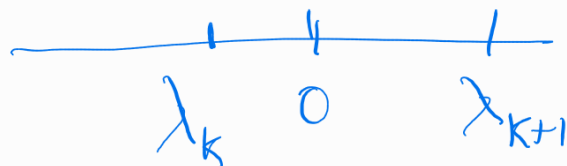
(verificare per esercizio)

(2) [instabilità]  $\lambda_i$  reali (non nulli)

$$S \oplus G_0: \xi_0 = 0$$

suppongo  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$



$$x' = Ax + R(x)$$

$$\mu = \min\{|\lambda_k|, |\lambda_{k+1}|\}$$

$$W(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \leq k} x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} x_i^2$$

soddisfa le ipotesi del  
criterio di instabilità

$$W(0) = 0$$

$$\xi_j \rightarrow 0 \\ W(\xi_j) > 0 \quad (\text{ok})$$

$$\dot{W}(x) > 0 \quad \text{in un intorno bucato di } 0$$

$$\nabla W(x) \cdot (Ax + R(x)) = \sum_{i \leq k} (-\lambda_i) x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} \lambda_i x_i^2$$

$$+ o(|x|^2)$$

$$\geq \mu |x|^2 + o(|x|^2)$$

in un opport.  
intorno di 0

$$\geq \frac{\mu}{2} |x|^2$$

— 0 —

Es (per caso)

1)  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$  tot. sconnesso  
punti distanti stanno in comp. connesse distinte

2) Vale il viceversa? ( $\Leftarrow$ )

sugg:  $n=1$

Es: mostrare che se  $\phi$   $\alpha$ -Hölder  
( $|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \forall x, y$ )

allora (2)  $H^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} H^s(E)$



$$(b) \dim_H(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$$

ES: Dimostrare che la scala del diavolo è  $\alpha_0$ -Hölder con  $\alpha_0 = \frac{\log 2}{\log 3}$

---

Se  $Y$  è soluzione matriciale  
 $A: \mathbb{R} \rightarrow M(n \times n)$  cont. int del sistema

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$$

$$\begin{cases} y_i' = A(t) y_i \\ y_i(0) = e_i \end{cases}$$

Mostrare che se  $A(t) + {}^t A(t) = 0 \quad \forall t$

allora  $Y$  è ortogonale ( ${}^t Y Y = Id$ )

---

$$y' = Ay$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(de) dire se 0 è stab./instab

(b) Scrivere la sol generale

Oss: Per (a) basta conoscere gli autovalori di  $A$

per (b) servono anche autovettori  
(e cambio di base)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -2 - 2 - \lambda - [(2+\lambda) + 2] - \lambda \left[ (2+\lambda)^2 - 4 \right] =$$

$$= -4 - \lambda - 4 - \lambda - \lambda^3 - \cancel{4}\lambda^2 =$$

$$= -8 - 2\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 = P(\lambda)$$

$$= (-\cancel{4} - \lambda)(2 + \lambda^2)$$

$$\{-4, \pm i\sqrt{2}\}$$

0 è stabile  
ma non asintoticamente stabile

sol generale  $e^{tA}$

$$A = B N B^{-1}$$

$N$  ha forma normale  
(reale)

$B$  cambio di base

(x es. a casa)

\_\_\_\_\_ 0 \_\_\_\_\_

11 mag 2023

Riprendo es di keri

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u' = Au \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad e^{tA} u_0$$

$$\sigma(A) = \{4, \pm \sqrt{2}i\}$$

$$\lambda = 4 \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Aw = 4w$$

$$\lambda = i\sqrt{2} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$v = \xi + i\eta \quad \text{con } \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se  $A$  è matrice reale

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

$$Av = \lambda v \quad (\text{con } v \neq 0)$$

anche

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

$$\lambda = a + ib$$

$$v = \xi + i\eta$$

$$A\xi = A(\operatorname{Re} v) = \operatorname{Re}(Av) = \operatorname{Re}(\lambda v)$$

$$A\eta = A(\operatorname{Im} v) = \dots = \operatorname{Im}(\lambda v)$$

$$\lambda v = (a\xi - b\eta) + i(b\xi + a\eta)$$

$$\begin{cases} A\xi = a\xi - b\eta \\ A\eta = b\xi + a\eta \end{cases}$$

considero  $B = (w, \xi, \eta)$

$$B : \begin{cases} e_1 \rightarrow w \\ e_2 \rightarrow \xi \\ e_3 \rightarrow \eta \end{cases}$$

$$N = B^{-1}AB = B^{-1}(Aw, A\xi, A\eta)$$

$$= B^{-1}(\lambda w, a\xi - b\eta, b\xi + a\eta) = (\lambda e_1, ae_2 - be_3, be_2 + ae_3)$$

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

$$A = BNB^{-1}$$

$$e^{tA} = B e^{tN} B^{-1} \quad (*) \quad \lambda = 4 \quad a=0, b=\sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{2}t & \sin\sqrt{2}t \\ 0 & -\sin\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}$$

Per finire calcolare  $B^{-1}$  e il prodotto (\*)

Questo metodo funziona in generale  $A \in (n \times n)$  reale

$$A = B N B^{-1} \quad \text{con } N = \text{block}(J_1, \dots, J_\ell)$$

con blocchi del tipo seguente

| $J$                                                                                                                 | $e^{tJ}$                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(\lambda)$<br>$d \updownarrow \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ | $(e^{\lambda t})$<br>$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                  |
| $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$<br>$\nearrow I_{a,b}$                                               | $e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$<br>$\nwarrow R_b(t)$                                  |
| $\begin{pmatrix} I_{a,b} & I_{b,0} & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & I_{b,0} \\ & & & I_{a,b} \end{pmatrix}$        | $e^{at} \begin{pmatrix} R_b(t) & tR_b(t) & \frac{t^2}{2!}R_b(t) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & tR_b(t) \\ & & & R_b(t) \end{pmatrix}$ |

Se  $A \in M(n \times n)$ , quando è che 0 è stabile  
 a sintot stabile  $a' = Au$

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$  e non ci sono blocchi di Jordan con  $d > 1$  quando  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$

$\Leftrightarrow$  l'origine è equilibrio stab.

$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Leftrightarrow$  l'origine è equilibrio asintoticamente stab.

$$\begin{array}{c} \text{---} J \\ (\lambda) \\ \updownarrow d \left( \begin{array}{ccc} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ \nearrow I_{a,b} \\ \left( \begin{array}{cc} I_{a,b} \varepsilon I_{1,0} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{1,0} \\ & I_{a,b} \end{array} \right) \end{array}$$

Sia  $A$  matrice con autov.  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq -\mu < 0 \quad \forall i$

$N_\varepsilon$  forma normale di  $A$  con  $\varepsilon < \mu$

$$u' = N_\varepsilon u + R(u) \quad (*)$$

$R(u) = o(|u|)$

$V = \frac{1}{2} |x|^2$  è una funz. di

Lyapunov per 0 rispetto all'eq (\*)

in un opportuno intorno di 0

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V(x) (N_\varepsilon x + R(x)) \\ &\leq -\mu |x|^2 + \varepsilon |x|^2 + o(|x|^2) \end{aligned}$$

Se  $Y$  è soluzione matriciale di

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Id \end{cases} \quad \text{con } A \in \mathbb{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(n \times n))$$

t.c.  ${}^T A(t) + A(t) = 0 \quad \forall t$

Allora  ${}^T Y(t) Y(t) = Id$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^T Y(t) Y(t)) &= {}^T (Y'(t)) Y(t) + {}^T Y(t) Y'(t) \\ &= {}^T Y(t) {}^T A(t) Y(t) + {}^T Y(t) A(t) Y(t) \\ &= {}^T Y(t) ({}^T A(t) + A(t)) Y(t) = 0 \end{aligned}$$

Nel caso di  $\mathbb{R}^3$  le matrici antisimmetriche sono generate da

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' + 2y = \cos t \\ y' - 2x = \sin t \end{cases}$$

$$b(t) = 0$$

$$e^{tA} u_0$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u' = Au + b(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} u_0 \quad u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$e^{-sA} b(s) = \begin{pmatrix} \cos 2s & +\sin 2s \\ -\sin 2s & \cos 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2s \cos s + \sin 2s \sin s \\ -\sin 2s \cos s + \cos 2s \sin s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ -1 + \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

↑ soluz. generale del sistema dato.

- (i)  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ;  $H^1(E) = 0 \Rightarrow E$  tot. sconnesso
- (ii) vale il viceversa?

Caso  $n=1$  se una comp. connessa contiene  $p_0 < p_1$  con  $p_0 \neq p_1$   
 $\Rightarrow E \supset [p_0, p_1] \Rightarrow H^1(E) = 1$

non vale il viceversa (basta considerare il complementare dell' "ingrassamento dei razionali")



$\boxed{n > 1}$  Siano  $P_0 \neq P_1 \in E \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\phi(P_1) > 0$$

$$\phi(x) = d(x, P_0)$$

$$\phi(E)$$

$$\phi(P_0) = 0$$

$$\phi \text{ è } 1\text{-Lip}$$

$$H^1(\phi(E)) \leq H^1(E) = 0$$

$$\phi(E) \text{ tot sconnesso} \Rightarrow \boxed{\xi \in (0, \phi(P_1)) \setminus \phi(E)}$$

$$E = \underbrace{\{x \in E : d(x, P_0) < \xi\}}_{\psi_{P_0}} \sqcup \{x \in E : d(x, P_0) > \xi\} \quad \text{unione disgiunta}$$

$$E \cap \{x : d(x, P_0) = \xi\} = \emptyset$$

$$\phi \text{ t.c.} \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq C |x - y|^\alpha$$

$$(a) \quad H^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^{s/\alpha} H^s(E)$$

$$(b) \quad \dim_H(\phi(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E) \quad \leftarrow$$

$s_1 \quad \quad \quad \frac{1}{\alpha} s_0$

Dim Se  $E_i$  è un ricoprimento di  $E$  con insiemi di diam minore di  $\delta$

$$E \subseteq \bigcup E_i \quad \text{diam}(E_i) < \delta$$

$$\phi(E) \subseteq \bigcup \phi(E_i)$$

$$\boxed{\text{diam}(\phi(E_i)) \leq C \text{diam}(E_i)^\alpha}$$

$$\sum_i \text{diam} \phi(E_i)^{s/\alpha} \leq C^{s/\alpha} \sum_i \text{diam}(E_i)^s <$$

$$H_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(E_i)^s : \bigcup E_i \supseteq E, \text{diam}(E_i) < \delta \right\}$$

$$H^s(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(E)$$

$\varepsilon > 0$   
arbitrario

scelgo  $E_i$  :  
 $|E_i| < \delta$   
 $\cup E_i \supset E$

$$\sum_i |E_i|^s < \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$$

$$\mathcal{H}_{\delta^\alpha}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq \sum |\phi(E_i)|^{s/\alpha} < C^\alpha \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon$$

$\delta \downarrow 0$

$$|\phi(E_i)| < \delta^{s/\alpha}$$

$$\cup \phi(E_i) \supset E$$

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) \leq C^\alpha \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon$$

~~(a)~~

(b) Sea  $S_0 := \dim_H(E)$   $S_1 = \dim_H(\phi(E))$

$$s > S_0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(E) = 0 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \mathcal{H}^{s/\alpha}(\phi(E)) = 0$$

$$\Rightarrow s/\alpha \geq \dim_H(\phi(E)) \Rightarrow S_0 \geq \alpha S_1$$

$$s > S_0 \Rightarrow s \geq \alpha \dim_H(\phi(E))$$

Quindi  $S_0 \geq \alpha \dim_H(\phi(E))$

~~(a)~~